



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Lucas PASCAL**

**le** mercredi 6 novembre 2013

**Titre :**

Acoustique modale et stabilité linéaire par une méthode numérique avancée.  
Cas d'un conduit traité acoustiquement en présence d'un écoulement

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MEGeP : Dynamique des fluides

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Grégoire CASALIS (directeur de thèse)

Mme Estelle PIOT (co-directrice de thèse)

**Jury :**

M. Christophe AIRIAU - Président

M. Yves AUREGAN - Examineur

M. Grégoire CASALIS - Directeur de thèse

M. Yann DOUTRELEAU - Examineur

M. Gwénaél GABARD - Rapporteur

M. David MARX - Examineur

Mme Estelle PIOT - Co-directrice de thèse

M. Jean-Christophe ROBINET - Rapporteur

---

TABLE DES MATIÈRES

iii

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>II</b>  | <b>Méthode numérique générale : développement du code EMILE</b>   | <b>53</b>  |
| <b>4</b>   | <b>Adaptation d'un solveur aéroacoustique pour l'analyse aéroacoustique modale</b>                                      | <b>55</b>  |
| 4.1        | Extension du solveur aéroacoustique . . . . .   | 55         |
| 4.1.1      | Extension au cas transverse . . . . .   | 55         |
| 4.1.2      | Augmentation de l'ordre de discrétisation . . . . .   | 57         |
| 4.1.3      | Autres modifications : gradients de l'écoulement de base . . . . .  | 57         |
| 4.2        | Méthode de résolution du problème aux valeurs propres et couplage du code avec la librairie SLEPc . . . . .             | 58         |
| 4.2.1      | Méthode de Krylov-Schur . . . . .   | 58         |
| 4.2.2      | Utilisation de la librairie SLEPc . . . . .   | 58         |
| 4.2.3      | Illustration des propriétés de convergence . . . . .  | 58         |
| <b>III</b> | <b>Application du code EMILE pour le calcul de modes dans une section transverse</b>                                    | <b>63</b>  |
| <b>5</b>   | <b>Application du code à des configurations transverses avec rupture d'impédance</b>                                    | <b>65</b>  |
| 5.1        | Discontinuous Galerkin method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices . . . . .    | 65         |
| 5.2        | Complément à l'article : effet de l'angle du maillage à la rupture . . . . .  | 86         |
| 5.3        | Étude des effets 3D dans le banc B2A . . . . .  | 87         |
| 5.3.1      | Effets sur l'évolution axiale . . . . .   | 88         |
| 5.3.2      | Effets sur l'évolution en $y$ . . . . .   | 89         |
| 5.3.3      | Étude sur l'évolution axiale avec écoulement . . . . .  | 91         |
| <b>IV</b>  | <b>Analyse modale et stabilité non modale dans le plan longitudinal d'un conduit</b>                                    | <b>95</b>  |
| <b>6</b>   | <b>Mise en place des outils pour l'analyse de stabilité modale et non modale dans le plan longitudinal d'un conduit</b> | <b>97</b>  |
| 6.1        | Implantation de conditions aux limites PML pour le calcul non modal . . . . .   | 98         |
| 6.1.1      | Problème direct . . . . .   | 98         |
| 6.1.2      | Problème adjoint . . . . .  | 100        |
| 6.2        | Implantation de conditions aux limites PML pour le calcul modal . . . . .   | 104        |
| 6.2.1      | Première formulation . . . . .  | 104        |
| 6.2.2      | Autre formulation . . . . .   | 104        |
| 6.3        | Schémas temporels . . . . .   | 105        |
| 6.3.1      | Schéma explicite . . . . .  | 105        |
| 6.3.2      | Schéma implicite . . . . .  | 106        |
| 6.4        | Validations et illustrations . . . . .  | 107        |
| 6.4.1      | Utilisation des PML pour la propagation acoustique en domaine temporel . . . . .  | 107        |
| 6.4.2      | Validation des PML pour le calcul modal . . . . .   | 108        |
| <b>7</b>   | <b>Modèle de liner pour l'analyse modale temporelle et le calcul en domaine temporel</b>                                | <b>113</b> |
| 7.1        | Méthode choisie pour la modélisation des liners . . . . .   | 114        |
| 7.2        | Implantation de la méthode de Sbardella et collab. . . . .  | 115        |
| 7.2.1      | Implantation de la condition de Darcy . . . . .   | 115        |
| 7.2.2      | Résolution 1D . . . . .   | 119        |
| 7.3        | Extension de la méthode de Sbardella et collab. . . . .   | 121        |
| 7.3.1      | Opérateur adjoint : . . . . .   | 122        |
| 7.3.2      | Validations . . . . .   | 122        |
| 7.4        | Application au modèle d'impédance de Aurégan et Leroux [6] . . . . .  | 123        |
| 7.4.1      | Détermination des paramètres et évaluation de l'erreur . . . . .  | 123        |
| 7.4.2      | Amélioration de l'approximation de l'impédance du liner . . . . .   | 125        |
| 7.5        | Vers de futures extensions . . . . .  | 127        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.5.1    | Ajout de la réactance de masse . . . . .  | 127        |
| 7.5.2    | Ajout du terme $\phi$ . . . . .   | 128        |
| 7.5.3    | Autres modifications . . . . .  | 128        |
| <b>8</b> | <b>Étude d'une instabilité sur liner en présence d'écoulement cisailé par une approche non modale</b> | <b>131</b> |
| 8.1      | Présentation générale du cas d'étude . . . . .  | 132        |
| 8.2      | Recherche de la perturbation initiale optimale . . . . .  | 133        |
| 8.2.1    | Choix de la méthode . . . . .   | 133        |
| 8.2.2    | Présentation de la méthode . . . . .  | 133        |
| 8.3      | Étude préliminaire : cas simplifié d'une impédance réelle constante . . . . .                         | 136        |
| 8.3.1    | Présentation . . . . .  | 136        |
| 8.3.2    | Étude de stabilité locale . . . . .   | 136        |
| 8.3.3    | Étude stabilité non modale, liner de taille réduite . . . . .   | 137        |
| 8.3.4    | Étude de stabilité non modale, liner de «grande taille» . . . . .                                     | 141        |
| 8.4      | Étude avec liner réaliste . . . . .   | 145        |
| 8.4.1    | Gain et perturbation initiale optimale . . . . .  | 145        |
| 8.4.2    | Analyse temporelle et fréquentielle . . . . .   | 146        |
| 8.4.3    | Autre fonction coût . . . . .   | 148        |
| 8.4.4    | Amplification due à l'écoulement de Poiseuille seul . . . . .   | 149        |
| 8.5      | Étude modale . . . . .  | 149        |
| 8.5.1    | Présentation du cas d'étude . . . . .   | 149        |
| 8.5.2    | Calcul de stabilité globale . . . . .   | 151        |
| <b>9</b> | <b>Conclusions et perspectives</b>  | <b>155</b> |
| 9.1      | Conclusion . . . . .  | 155        |
| 9.2      | Perspectives . . . . .  | 157        |
| <b>V</b> | <b>Annexes</b>  | <b>159</b> |
| <b>A</b> | <b>Écriture des équations d'Euler sous la forme d'un système de Friedrich</b>                         | <b>161</b> |
| A.1      | Équation de continuité . . . . .  | 161        |
| A.1.1    | Autre forme . . . . .   | 161        |
| A.2      | Équation de quantité de mouvement . . . . .   | 162        |
| <b>B</b> | <b>Solutions analytiques de modes en milieu guidé</b>   | <b>163</b> |
| B.1      | Configuration transverse avec écoulement uniforme . . . . .   | 163        |
| B.1.1    | Conduit à section rectangulaire . . . . .   | 163        |
| B.1.2    | Conduit à section circulaire avec écoulement uniforme . . . . .                                       | 165        |
| B.2      | Configuration longitudinale . . . . .   | 167        |
| B.2.1    | Conduit invariant avec écoulement uniforme . . . . .  | 167        |
| B.2.2    | Conduit ouvert obstrué par deux plaques perforées . . . . .   | 168        |
| B.2.3    | Conduit fermé sans écoulement . . . . .   | 169        |
| <b>C</b> | <b>Études unidimensionnelles</b>  | <b>171</b> |
| C.1      | Solveur Galerkin discontinu unidimensionnel . . . . .   | 171        |
| C.2      | Détermination de l'impédance . . . . .  | 172        |
| C.3      | Couche critique . . . . .   | 172        |
| C.4      | Étude paramétrique unidimensionnelle d'une couche PML . . . . .                                       | 175        |
| C.4.1    | Étude préliminaire : précision numérique . . . . .  | 175        |
| C.4.2    | Effet de la position de la couche PML : paramètre $x_0$ . . . . .                                     | 176        |
| C.4.3    | Effet de l'amortissement : paramètres $\sigma_0, \beta, d$ . . . . .                                  | 177        |
| C.4.4    | Effet de la position du domaine PML sur les modes de Béranger . . . . .                               | 179        |



## TABLE DES FIGURES

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Sources principales de bruit d'un avion au décollage (a) et à l'atterrissage (b) (source ICCAIA).   | 3  |
| 2.1  | Cellule d'expérimentation du banc B2A. Le matériau absorbant est représenté en violet.  | 10 |
| 2.2  | Configurations longitudinale (a) et transverse (b) du banc B2A (jeu de couleurs similaire à la figure 2.1).   | 10 |
| 2.3  | Exemple de mode piégé dans une cavité (source [49])   | 14 |
| 2.4  | Schéma d'un liner formé d'une structure en nid d'abeille recouvert d'une plaque perforée et reposant sur une paroi rigide (source [131]).   | 15 |
| 2.5  | Géométrie permettant l'étude théorique de l'effet d'une cavité associée ou non à une plaque perforée (a) (source [91]). Coefficient de transmission (b) avec $Z_p = 0$ (—), $Z_p = 0,5$ (.....), $Z_p = -i$ (---) et $Z_p = 0,5 - i$ (---) (d'après [91]).                                  | 16 |
| 2.6  | Discontinuités d'impédance dans un conduit représentant une nacelle de turboréacteur (source [157]).  | 18 |
| 2.7  | Réponses impulsionnelles caractéristiques d'un système présentant une dynamique de type résonateur (a) ou amplificateur de bruit (b).   | 23 |
| 2.8  | Illustration du phénomène de croissance transitoire due à la non-orthogonalité de deux vecteurs propres.  | 24 |
| 2.9  | Schéma des liners utilisés par Jüschke [81] dans un conduit circulaire (a) et dans un conduit rectangulaire (b) (source [81])   | 27 |
| 2.10 | Résistance (a) et réactance (b) de l'impédance mesurée (symboles) et des modèles d'impédance avec (trait continu) et sans (pointillés) pertes visco-thermiques (source [6]).  | 28 |
| 3.1  | Exemple de maillage pour la formulation Galerkin discontinue, représentation des traces intérieures et extérieures et des flux numériques.  | 32 |
| 3.2  | Approximation de la relation de dispersion pour différents ordres   | 38 |
| 3.3  | Transformation du triangle courant $D_l$ vers le triangle de référence $D$  | 40 |
| 3.4  | Schéma représentant la troncation d'un conduit exhibant une région de non-homogénéité en $x$ .  | 42 |
| 3.5  | Schématisation de l'utilisation de la méthode des éléments infinis pour le calcul de la diffraction autour d'un objet noté B (a) et d'un élément P1 infini (b) (source [52]).   | 44 |
| 3.6  | Utilisation de zones PML permettant de tronquer le domaine physique.  | 44 |
| 3.7  | Relation de dispersion sans (a) et avec (b) transformation spatio-temporelle pour $n = 1$ (en bleu), $n = 2$ (en rouge) et $n = 3$ (en vert). Les disques pleins donnent les points où $c_g = 0$ (..... : $c_g < 0$ et --- : $c_g > 0$ ) (d'après [74, Figures 1 et 2]).                    | 46 |
| 3.8  | Spectre obtenu dans un conduit de hauteur $H$ avec cavité. Les fréquences de coupure $\omega = a_0 n \pi / H$ correspondent à $\frac{\omega H}{3a_0 \pi} = \frac{n}{3}$ . Les différents symboles correspondent à l'utilisation de condition de symétrie ou d'antisymétrie (source : [84]). | 48 |
| 4.1  | Motif utilisé pour la construction de maillages structurés.   | 59 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.2  | Effet du raffinement sur la précision : tracé de $\left  \frac{k-k_{m,n}^a}{k_{m,n}^a} \right $ en fonction de $\lambda_T/\Delta h$ pour les maillages de pas $\Delta h_1$ (-△-) et $\Delta h_2$ (□) et estimation de l'ordre de convergence (— : $3,32 \times (\frac{\lambda_T}{\Delta h})^{-5,31}$ ). . . . .  | 59  |
| 4.3  | Effet de l'algorithme sur la précision numérique : tracés de $\left  \frac{k-k^a}{k^a} \right $ en fonction de $\eta$ pour un maillage structuré (en bleu) et des maillages générés par les algorithmes MeshAdapt (en rouge), Delaunay (magenta) et Frontal (cyan) pour les pas de maillages $\Delta h_1$ (trait continu) et $\Delta h_2$ (trait pointillé). . . . . | 60  |
| 4.4  | Complexité temporelle (calcul séquentiel) - Les résultats en bleu et en rouge correspondent aux calculs effectués sur Stelvio avec les décomposition LU respectivement de PETSc et de MUMPS. Les résultats en noir correspondent aux calculs menés sur Naruto avec la factorisation LU implantée dans PETSc. . . . .   | 61  |
| 5.1  | Zoom sur le maillage autour de la jonction entre la paroi rigide (en noir) et le liner (en bleu). Cas où le segment partant de la jonction est orthogonal (a) et non orthogonal (b) au bord du conduit. . . . .  | 86  |
| 5.2  | Erreur relative sur les nombres d'ondes obtenues pour les maillages 1 (pointillées rouge) et 2 (en bleu) par rapport au maillage 3 de référence. . . . .   | 87  |
| 5.3  | Domaine de calcul utilisé pour la détermination de l'impédance par méthode inverse (source [116]) . . . . .  | 87  |
| 5.4  | Maillage du banc B2A. En bleu est représenté la portion traitée du conduit. . . . .  | 88  |
| 5.5  | Résistance (a) et réactance (b) pour $R = 0,2$ : l'impédance $Z_{uni}$ est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz $Z_{HR}$ imposé dans le calcul transverse. . . . .   | 89  |
| 5.6  | Résistance (a) et réactance (b) pour $R = 1$ : l'impédance $Z_{uni}$ est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz $Z_{HR}$ imposé dans le calcul transverse. Les ronds représentent la valeur de $Z_{uni}$ obtenue à partir d'un calcul où 80% de la paroi inférieure est traitée acoustiquement. . . . .    | 89  |
| 5.7  | Résistance (a) et réactance (b) pour $R = 5$ : l'impédance $Z_{uni}$ est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz $Z_{HR}$ imposé dans le calcul transverse. . . . .   | 90  |
| 5.8  | Résistance (a) et réactance (b) pour $R = 1$ : impédance $Z_{uni}$ (symbole +) et impédance $\hat{Z}_{uni}$ déterminée à partir de $v$ (symbole ○), de $w$ (symbole □) et de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ (symbole △). Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz $Z_{HR}$ imposé dans le calcul transverse. . . . .                          | 91  |
| 5.9  | Parties réelle (a) et imaginaire (b) de $v(0; y)$ (en bleu) et de $v _{uni}(y)$ (en rouge). . . . .  | 91  |
| 5.10 | Parties réelle (a) et imaginaire (b) de $w(0; y)$ (en bleu) et de $w _{uni}(y)$ (en rouge). . . . .  | 92  |
| 5.11 | Nombre de Mach de l'écoulement de Poiseuille imposé dans EMILE projeté en $x = 0$ (courbe bleue) et de l'écoulement utilisé dans le code unidimensionnel de Mach moyen 0,25 (ligne rouge continue) et de Mach moyen 0,36 (ligne rouge pointillée). . . . .   | 93  |
| 5.12 | Résistance (a) et réactance (b) : l'impédance $Z_{uni}$ est représentée par des carrés pour $M = 0,25$ et par des cercles pour $M = 0,36$ . Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz imposé dans le calcul transverse. . . . .   | 93  |
| 5.13 | Résistance (a) et réactance (b) : l'impédance $Z_{uni}$ est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz imposé dans le calcul transverse. Les croix correspondent . . . . .   | 94  |
| 6.1  | Domaine de calcul obtenu par introduction de domaines PML. . . . .   | 98  |
| 6.2  | Perturbation Gaussienne imposée à $t = 0$ , tracé du champ $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$ dans la région $x \in [-H/2; H/2]$ . . . . .   | 108 |
| 6.3  | Comparaison des champs de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ obtenus aux instants $t a_0/H = \{0,41; 0,54; 0,68; 1,02; 1,36\}$ obtenus avec (à gauche) et sans couches PML (à droite) dans la région délimitée $ x  \leq H$ . . . . .   | 109 |
| 6.4  | Configuration de validation, les deux segments gris en pointillé représentent des plaques perforées. . . . .   | 110 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.5  | Pulsations propres obtenues pour $\sigma H/a_0 = 3,2$ (en rouge) et $\sigma H/a_0 = 6,6$ (en bleu)(a). Les valeurs des cibles sont représentées par les traits pointillés. Les croix représentent les pulsations obtenues semi-analytiquement. Illustration de l'effet du filtrage (b). . . . .   | 110 |
| 6.6  | Fonctions propres $\Re\left(a_0 \frac{\rho}{\rho_0}\right)$ d'un mode de Béranger (a) et d'un mode parasite (b). Les lignes pointillés correspondent aux interfaces entre le domaine physique et les couches PML. . . . .   | 110 |
| 6.7  | Cavité en conduit et zoom sur le maillage autour du coin de la marche ( $x = L/2; y = 0$ ). . . . .   | 111 |
| 6.8  | Pulsations propres obtenues pour $\sigma L/(2\pi a_0) = 0,30 + 0,01i$ ( $\circ$ ), $\sigma L/(2\pi a_0) = 0,50 + 0,01i$ ( $\triangle$ ) et $\sigma L/(2\pi a_0) = 1,50 + 0,01i$ ( $\triangle$ ) avant (a) et après filtrage (b). Les cercles correspondant aux valeurs propres obtenues en imposant une condition de symétrie sur $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ en $x = 0$ tandis que les triangles correspondent à une condition d'antisymétrie. Les lignes pointillées correspondent aux cibles. Sur la figure (b), les valeurs propres se trouvant dans la zone grisée correspondent à des modes de Béranger qui n'ont pas été filtrés. . . . .  | 112 |
| 6.9  | Champs $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$ des modes acoustiques résonants de pulsations propres $\omega L/(2\pi a_0) = 0,30 - 3,8 \times 10^{-3}i$ (a), $\omega L/(2\pi a_0) = 0,51 - 1,7 \times 10^{-3}i$ (b) et $\omega L/(2\pi a_0) = 1,50 - 4,5 \times 10^{-4}i$ (c). . . . .   | 112 |
| 7.1  | Modélisation d'un liner par la méthode de Sbardella et collab. : ajout d'éléments unidimensionnels dans le domaine de calcul modélisant les cavités du liner et modélisation de la plaque perforée par une condition de Darcy eq. (7.2). Les lignes pointillées représentent le domaine de calcul. . . . .  | 114 |
| 7.2  | Représentation de la séparation des éléments du maillage $D_l$ et $D_{l'}$ par une plaque perforée. . . . .   | 115 |
| 7.3  | Cas de validation de la condition de Darcy : géométrie (a) et maillage (b). . . . .   | 116 |
| 7.4  | Pulsations propres - Comparaison entre les résultats obtenues avec EMILE ( $\square$ ) et la première $\hat{\omega}_{(m;n)}^a(+)$ et la seconde $\omega_{(m;n)}^a(\times)$ familles de solutions analytiques. Pour chaque valeur propre, l'ordre $m$ en $x$ et l'ordre $n$ en $y$ du mode propre associé sont donnés sous la forme $(m;n)$ . . . . .  | 117 |
| 7.5  | Erreur relative $\left  \frac{\omega - \omega_{m;n}^a}{\omega_{m;n}^a} \right $ en fonction du nombre d'élément par longueur d'onde $\lambda/\Delta h$ pour la première (—) et la seconde (—) famille de mode. Erreur relative obtenue en section 4.2.3.1 (---) : $3,32 \times (\lambda_T/\Delta h)^{-5,31}$ . . . . .  | 117 |
| 7.6  | Champ de $\Re(v)$ (a) et $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$ (b) du mode $(2;1)$ . . . . .   | 118 |
| 7.7  | Schéma représentant l'ajout d'éléments unidimensionnels sous un triangle appartenant au conduit. . . . .  | 121 |
| 7.8  | Courbe d'erreur relative $\left  \frac{\omega - \omega_{m;n}^a}{\omega_{m;n}^a} \right $ entre la solution semi-analytique et les valeurs propres donnés par EMILE pour $\sigma h/a_0 \in \{2,5; 4,7; 9,4; 14,1; 18,8\} + 1,2i$ en fonction du nombre d'élément par longueur d'onde $\lambda/\Delta h$ . Erreur relative obtenue en section 4.2.3.1 (---) : $3,32 \times (\lambda_T/\Delta h)^{-5,31}$ . Figure (a) : pas de maillage des éléments unidimensionnels déterminé à partir du pas de maillage des triangles situés sur la plaque perforée, figure (b) : définition du pas de maillage des éléments unidimensionnels à partir de la tolérance imposée ( $10^{-3}$ ). . . . . | 123 |
| 7.9  | Comparaison entre les valeurs propres de l'opérateur direct ( $\circ$ ) et le conjugué des valeurs propres de l'opérateur adjoint ( $\square$ ) pour $\sigma h/a_0 = 4,7 + 1,2i$ . . . . .  | 124 |
| 7.10 | Parties réelle (a) et imaginaire (b) de l'impédance donnée par le modèle avec pertes viscothermiques eq. (2.26) (courbe noire), par eq. (7.10) (courbe bleue), par eq. (2.27) avec les paramètres donnés dans la référence [6] (courbe rouge) et avec les paramètres $\phi = 1,07$ , $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$ s et $\varepsilon = 0,36$ (courbe verte). . . . .  | 124 |
| 7.11 | Erreur quadratique relative $ Z - Z_{VT} ^2/ Z_{VT} ^2$ où $Z$ est donné par eq. (7.10) (courbe bleue) et par eq. (2.27) avec les paramètres donnés dans la référence [6] (courbe rouge) et avec les paramètres $\phi = 1,07$ , $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$ s, $\varepsilon = 0,36$ (courbe verte). . . . .   | 125 |
| 7.12 | Parties réelle (a) et imaginaire (b) des impédances $Z_{VT}$ (courbe noire), $Z_m$ (courbe rouge), $Z_\phi$ (courbe verte), $Z_{EHR}$ (courbe cyan) et eq. (7.10) avec pour paramètres ceux déterminés en section 7.4.1 (courbe bleue). . . . .   | 126 |
| 7.13 | Erreur quadratique relative $ Z - Z_{VT} ^2/ Z_{VT} ^2$ où $Z = Z_m$ (courbe rouge), $Z = Z_p$ (courbe verte), $Z = Z_{EHR}$ (courbe cyan) et où $Z$ est donné par eq. (7.10) (courbe bleue). . . . .   | 126 |

## TABLE DES FIGURES

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 8.1  | Conduit de hauteur $H$ revêtu d'un liner de longueur $L$ et borné en amont et en aval par des domaines PML. Les points rouges correspondent aux positions des capteurs. . . . .  | 132 |
| 8.2  | Maillage associé à la partie amont de la géométrie représentée figure 8.1. Les conditions aux limites sont de type non réfléchissantes basées sur les caractéristiques (en rouge), paroi rigide (en bleu) et liner (violet). La zone grisée en amont représente le domaine PML. . .  | 132 |
| 8.3  | Processus itératif de calcul de la perturbation initiale optimale. . . . .   | 136 |
| 8.4  | Spectre des nombres d'ondes $kH$ . Les symboles $\bigcirc$ et $+$ correspondent aux valeurs propres obtenues pour $\omega H/V_{max} = 2,94$ et $\omega H/V_{max} = 4,9 \times 10^{-3}$ respectivement, la courbe $---$ correspond au balayage sur $\omega H/V_{max} \in [2,94; 2,94 + 49i]$ , la courbe $.....$ correspond au balayages $\omega H/V_{max} \in [2,94; 4,9 \times 10^{-3}]$ et $\omega H/V_{max} \in [2,94; 49]$ . . . . .   | 137 |
| 8.5  | Amplification maximale $G(T)$ . . . . .  | 138 |
| 8.6  | Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ de la perturbation initiale optimale maximisant le gain à $TV_{max}/H \approx 6$ (a). Zoom pour le même maillage (b) et pour un maillage plus raffiné (c). Les lignes pointillées correspondent aux interfaces entre le domaine physique et les couches PML. Les conditions aux limites sont de type paroi rigide (en noir), impédance (en blanc), non réfléchissantes basées sur les caractéristiques (en rouge). . . . .  | 138 |
| 8.7  | Évolution de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ sur le liner. . . . .   | 139 |
| 8.8  | (a) : Amplification maximale $G(T)$ obtenue avec $x_0 - (x_L + L/2) = 2H$ (en bleu) et $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$ (en rouge). (b) Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ d'énergie maximale pour $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$ . . . . .  | 139 |
| 8.9  | Fonction $f(x)$ , évolution en $x$ (a) et en $y$ (b). . . . .  | 140 |
| 8.10 | Amplification maximale $G(T)$ obtenue avec $x_0 - (x_L + L/2) = 2H$ (en bleu) et $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$ (en rouge), avec (ligne pointillée) et sans pondération (trait continu) de l'énergie par $f$ . . . . .   | 141 |
| 8.11 | Amplification maximale $G(T)$ . . . . .  | 141 |
| 8.12 | Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ de la perturbation initiale maximisant le gain à $TV_{max}/H = 29$ (a) et champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ obtenu à $TV_{max}/H = 29$ par propagation de cette perturbation initiale. . .   | 142 |
| 8.13 | Évolutions de $u(a)$ , $v(b)$ et $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(c)$ sur la paroi inférieure du champ d'énergie maximale à $TV_{max}/H = 29$ . La zone grisée correspond à la position du liner. . . . .  | 142 |
| 8.14 | Évolutions de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ sur le liner (a), transformée de Fourier de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x)$ sur le liner (b). . .   | 143 |
| 8.15 | Mesures de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ par les capteurs situés en $x_L - L/4(a)$ , $x_L(b)$ et $x_L + L/4(c)$ . . . . .  | 143 |
| 8.16 | Transformées de Fourier rapides des signaux temporels de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ mesurés sur le capteur en $x_L - L/4$ (en bleu), $x_L$ (en vert) et en $x_L + L/4$ (en rouge). . . . .  | 144 |
| 8.17 | Évolution de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; 0)$ en amont (a) et aval (b) du liner. . . . .  | 144 |
| 8.18 | Gain $G(T)$ , la courbe bleue correspond à la fonction coût eq. (8.2) (où les cavités appartiennent à $\Omega_0$ ) et la courbe rouge pointillée à la fonction coût eq. (8.4) (voir section 8.4.3). .  | 145 |
| 8.19 | Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour $TV_{max}/H = 1$ (première ligne), $TV_{max}/H = 4$ (deuxième ligne) et $TV_{max}/H = 7$ (troisième ligne). Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre $t = 0$ et $t = T$ (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir. . . . .   | 146 |
| 8.20 | Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour $TV_{max}/H = 9$ (première ligne), $TV_{max}/H = 16$ (deuxième ligne) et $TV_{max}/H = 23$ (troisième ligne). Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre $t = 0$ et $t = T$ (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir. . . . . | 147 |
| 8.21 | Évolutions de $u(a)$ , $v(b)$ et $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(c)$ sur la paroi inférieure du champ d'énergie maximale à $TV_{max}/H = 23$ . La zone grisée correspond à la position du liner. . . . .  | 147 |
| 8.22 | Mesures de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ par les capteurs situés en $x_L - L/4(a)$ , $x_L(b)$ et $x_L + L/4(c)$ . . . . .  | 148 |
| 8.23 | Transformées de Fourier rapides des signaux temporels de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ mesurés sur le capteur en $x_L + L/4$ . . . . .   | 148 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 8.24 | Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour $TV_{max}/H = 4$ (première ligne) et $TV_{max}/H = 7$ (deuxième ligne). Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre $t = 0$ et $t = T$ (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir. . . . .   | 149 |
| 8.25 | Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour $TV_{max}/H = 16$ (première ligne) et $TV_{max}/H = 23$ (deuxième ligne). Champ de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre $t = 0$ et $t = T$ (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir. . . . . | 150 |
| 8.26 | Écoulement turbulent obtenu par intégration numérique de eq. (2.28) (a). Gradient du profil de vitesse (eq. (2.28)) $M'_0(y)$ (b). . . . .   | 151 |
| 8.27 | Résistance (a) et réactance (b) de la loi d'impédance imposée par Marx et Aurégan [96] (en rouge) et de celle imposée dans EMILE (en bleu). Erreur quadratique entre les deux modèles $E_Z =  Z - Z_{MA} ^2 /  Z_{MA} ^2$ (c). . . . .   | 151 |
| 8.28 | Décomposition du domaine de calcul en sous domaines. Les zones grisées en amont et aval correspondent aux couches PML. . . . .   | 152 |
| 8.29 | Valeurs propres obtenues pour les cibles $\sigma H/a_0 = 0,39 + 0,24i$ (a), $\sigma H/a_0 = 0,64 + 0,45i$ (b) et $\sigma H/a_0 = 0,39 + 0,02i$ (c), les positions des cibles sont représentées par les lignes pointillées. Les cercles correspondent aux valeurs propres obtenues par EMILE et les carrés pleins sont les valeurs propres retenues par le critère de Shi et collab.. . . .   | 152 |
| 8.30 | Champs de $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ des modes associés aux valeurs propres $\omega H/a_0 = 0,35 + 0,18i$ (a) et $\omega H/a_0 = 0,62 + 0,46i$ (b). Les parois rigides sont représentées par des traits épais noirs et le liner par un trait épais blanc. . . . .   | 153 |
| 8.31 | Évolutions de $u$ (a), $v$ (b) et $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ (c) sur la paroi inférieure du mode de valeur propre $\omega H/a_0 = 0,35 + 0,18i$ . La zone grisée correspond à la position du liner. . . . .   | 154 |
| 8.32 | Évolutions de $u$ (a), $v$ (b) et $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ (c) sur la paroi inférieure du mode de valeur propre $\omega H/a_0 = 0,62 + 0,46i$ . La zone grisée correspond à la position du liner. . . . .   | 154 |
| B.1  | Géométrie de la section transverse d'un conduit rectangulaire. . . . .   | 163 |
| B.2  | Géométrie de la section transverse d'un conduit circulaire. . . . .  | 165 |
| B.3  | Solutions $Y_{m,n}$ de l'équation (B.8), dénotées $(m,n)$ sur la figure. Résultats obtenus avec une pulsation adimensionnée (par $R$ et $a_0$ ) $\bar{\omega} = 30$ et $Z = 2 + i$ . . . . .   | 167 |
| B.4  | Conduit obstrué par deux plaques perforées (représentées par les deux segments gris en pointillé). . . . .   | 168 |
| C.1  | Fréquences propres pour un écoulement de Poiseuille (○) de Mach $M = 0,3$ pour un nombre d'onde $kH = 2,03$ . Les croix noires représentent les fréquences obtenues analytiquement pour un écoulement uniforme de Mach $M = 0,3$ . Zoom sur la branche continue (b), les lignes pointillées correspondent à $\{kU_0(y_{GD})H/a_0 \mid y_{GD} \in Y_{GD}\}$ . . . . .   | 173 |
| C.2  | Fonctions propres $\Re(u)$ (a), $\Re(v)$ (b) et $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$ (c) associées à la valeur propre $\omega H/a_0 = k_x U_0(y/H = 0.2) \approx 0,49$ . Les lignes pointillées donnent la position du point critique. . . .   | 174 |
| C.3  | Fonctions propres $\Re(u)$ (a), $\Re(v)$ (b) et $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$ (c) associées à la valeur propre $\Re(\omega)H/a_0 = k_x U_0(y/H = 0.85) \approx 0,37$ . Les lignes pointillées donnent la position du point critique. . .  | 174 |
| C.4  | Valeurs propres pour un écoulement de Poiseuille de Mach $M = 0,3$ et pour un nombre d'onde $kH = 2,03$ , discrétisation avec des polynômes d'ordre six (○) et des polynômes d'ordre deux (□). Les lignes pointillées correspondent à $\{kU_0(y_{GD})H/a_0 \mid y_{GD} \in Y_{GD}\}$ . . .   | 175 |
| C.5  | Configuration unidimensionnelle : domaine physique (a) et domaine de calcul (b). . . . .   | 175 |
| C.6  | Courbe d'erreur entre les modes calculés numériquement et les solutions analytiques $\omega_n^{rig,i}$ , $i \in \{1,2\}$ ( $\Delta_x = 0,75$ cm), $n \in \llbracket 1,10 \rrbracket$ . . . . .   | 176 |
| C.7  | Courbe d'erreur entre les modes calculés numériquement et la solutions analytique $\omega_n$ pour $x_0 = L$ (courbe bleu), $x_0 = 2L$ (courbe rouge) et $x_0 = 3L$ (courbe verte). La ligne pointillée correspond à l'erreur numérique calculée en section C.4.1. $n$ est l'ordre du mode. . .   | 177 |

## TABLE DES FIGURES

---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| C.8  | Erreur sur les solutions analytiques $\omega_n$ en fonction du paramètre $\sigma_0$ pour $\beta = 1$ (a) et $\beta = 2$ (b). Les différentes courbes correspondent à $n = 1$ (bleu), $n = 2$ (rouge), $n = 3$ (cyan), $n = 4$ (magenta), $n = 5$ (vert), $n = 6$ (jaune). . . . .  | 178 |
| C.9  | Erreur sur les solutions analytiques $\omega_n$ en fonction de l'amortissement par la couche PML à l'extrémité de celle-ci : $G_{pml}(x_0 + d)$ . Les différentes courbes correspondent à $\beta = 1$ (trait continu), $\beta = 2$ (trait pointillé), $n = 1$ (bleu), $n = 2$ (rouge), $n = 3$ (cyan), $n = 4$ (magenta), $n = 5$ (vert), $n = 6$ (jaune). . . . . | 178 |
| C.10 | Fréquences propres obtenues pour différentes valeurs de $x_0$ . . . . .  | 179 |



## LISTE DES TABLEAUX

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 3.1 | Nombre de points par longueur d'onde nécessaire pour respecter les critères $ \Re(\Omega) - K  < 1\%$ et $ \Im(\Omega)  < 1\%$ . . . . .   | 37  |
| 3.2 | Coordonnées des points de discrétisation dans le repère lié au triangle de référence D et expressions des polynômes de Lagrange associés à chacun de ces points de contrôle pour $N_p = 1$ . . . . . | 40  |
| 4.1 | Coordonnées des points de discrétisation dans le repère lié au triangle de référence D et expressions des polynômes de Lagrange associés à chacun de ces points de contrôle pour $N_p = 2$ . . . . . | 57  |
| 4.2 | Classement des algorithmes de maillage (source : [57]). . . . .  | 60  |
| 5.1 | Écart relatif entre $Z_{HR}$ et $Z_{uni}$ (cas avec écoulement $M=0,25$ et revêtement acoustique uniforme). . . . .  | 93  |
| 6.1 | Valeurs limites du nombre CFL assurant la stabilité. . . . .   | 106 |



## REMERCIEMENTS

L'accomplissement de ce travail de thèse représente, certes, un investissement important de ma part pendant trois ans mais a aussi été possible grâce à de nombreuses personnes qu'il convient de remercier et j'espère que je n'oublie ici personne.

Je remercie Gwénaél Gabard et Jean-Christophe Robinet pour avoir accepté d'être rapporteurs et pour la pertinence de leurs commentaires. Je souhaite remercier Christophe Airiau pour avoir pris la présidence du jury de thèse ainsi que les autres membres du jury : Yves Aurégan, Yann Doutreleau et David Marx. Ce jury de thèse m'a permis d'avoir une discussion scientifique enrichissante.

Merci à Pierre Millan, directeur du Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique (DMAE) de l'ONERA, pour m'avoir permis d'effectuer ma thèse au sein de son département ainsi qu'à Daniel Arnal, chef de l'unité Instabilités, Transition et Acoustique (ITAC). Je souhaite aussi dire MERCI à mes directeurs de thèse Grégoire Casalis et Estelle Piot. Je m'excuse auprès des autres encadrants de thèse de l'ONERA mais je pense que l'on ne fait pas mieux, tout est là : disponibilité, compétence, patience, gentillesse ... Et dire que j'ai osé les torturer par ma façon d'écrire les phrases les plus compliquées possibles et garnies de SA, AA, SS et AS ! Le moins que l'on puisse dire est qu'un tel encadrement simplifie amplement l'accomplissement d'un travail de thèse.

Je souhaite remercier les différentes personnes dont j'ai sollicité l'aide à un moment et qui ont pris de leurs temps pour moi : Philippe Delorme, Christophe Peyret, Vicent Mouysset, Vincent Perrier, Marie Escoufflaire, Hughes Deniau, Jean-Philippe Brazier, François Chedevergne, Alain Huard, François Rogier, Denis Matignon, Nicolas Garcia-Rosa et Allan Bonnet.

Je remercie les différentes personnes qui ont fait de l'ONERA un lieu de travail agréable. Il y a les «vieux» (désolé) Olivier et Maxime, merci au premier pour les séances de musculation et au deuxième pour m'avoir présenté Osborne. Il y a les jeunes docteurs : Muzot, Hélène, Julien, Germain et celui qui a été mon cher cobureau : le Gelbe, selon qui «l'abstraction fait obstruction à la construction». Et il y a bien sûr les doctorants : Cécile, Sheddia, David, Javier, Emma, Violène, Ysole, Bertrand, Jean-Michel, Gianluca, Maxime (et les Miami Dolphins), Vincent (et sa casquette), Gustavo et Jonathan. Une pensée à Fabien qui peut même rendre marrant un séjour à Colorado Springs.

Je souhaite remercier ceux qui m'ont permis de penser à autre chose qu'à des instabilités hydrodynamiques convectivement instables. Il y a mes chers Chabaux et assimilés (eux-mêmes instables) avec une petite pensée à Mevø et Armando. Il y a les Calendos qui vont à présent compter un docteur de plus. Il y a la Pomme, Bocboc et Cascassoulet ainsi que mon cher Manu avec qui être docteurs n'est que la première étape de notre plan machiavélique.

Je pense évidemment à ma famille et surtout à mes parents et à ma sœur qui ont tout fait pour moi et avec qui je ne regrette que la distance géographique. Mon dernier remerciement s'adresse à toi Marina. Tu es celle qui est là pour moi au quotidien depuis le début de cette aventure et ton soutien m'aura été précieux jusqu'à la soutenance.

## REMERCIEMENTS

---

Afin d'améliorer l'environnement sonore au voisinage des aéroports, les autorités européennes imposent des directives de plus en plus strictes concernant le niveau de bruit émis par un avion, faisant de la réduction de bruit des avions un enjeu de recherche majeur pour l'industrie aéronautique. En particulier, l'ACARE («Advisory Council for Aeronautics Research in Europe») a émis des recommandations imposant une forte réduction de bruit : l'objectif «Vision for 2020», publié en 2001, impose pour tout avion entrant en service en 2020 d'émettre un niveau de bruit perçu deux fois moins important que le niveau de référence défini en 2000. L'objectif «Flightpath 2050», publié en 2011, impose un niveau de bruit perçu 65% moins important par rapport à ce même niveau de référence.

Dès lors, il convient de mettre en lumière les sources principales de génération de bruit d'un avion au décollage et à l'atterrissage. Sur la figure 1.1 est représentée la répartition du bruit généré à l'atterrissage et au décollage par un avion moderne. Au décollage, le bruit de jet est prédominant et la soufflante (ou «fan» en anglais) est la deuxième source de bruit la plus importante. À l'atterrissage, en revanche, les soufflantes et la cellule («airframe» en anglais composée des trains d'atterrissage, des volets et des becs) contribuent principalement au bruit. En ce qui concerne la réduction du bruit généré par la soufflante

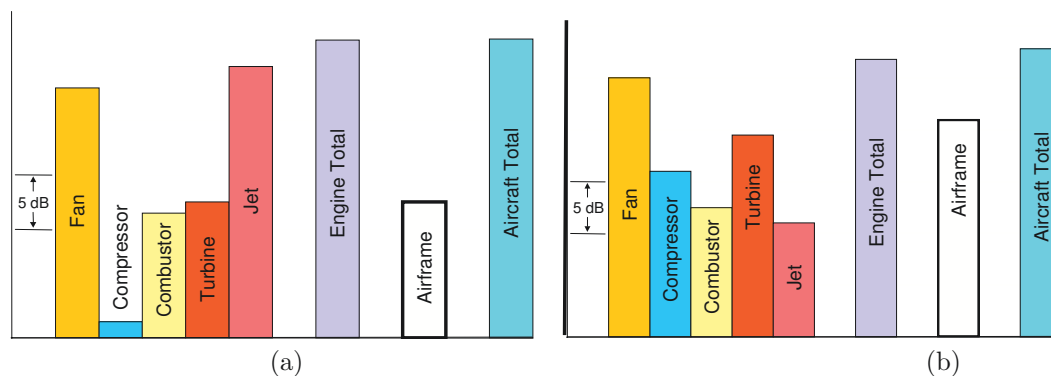


FIGURE 1.1 – Sources principales de bruit d'un avion au décollage (a) et à l'atterrissage (b) (source ICCAIA).

d'un turbofan, une des solutions technologiques largement retenue par les motoristes est l'utilisation de matériaux absorbants appelés «liners». Ceux-ci sont placés majoritairement sur la nacelle de part et d'autre de la soufflante et permettent une diminution significative du bruit. Les liners sont de plus couramment utilisés pour réduire par exemple le bruit généré par une APU («Auxiliary Power Unit») ainsi qu'en dehors du domaine aéronautique (comme les pots d'échappement d'automobiles).

Ces traitements acoustiques sont généralement composés d'une structure en nid d'abeille sur laquelle repose une plaque perforée. Les matériaux absorbants sont caractérisés acoustiquement par un nombre

complexe appelé impédance défini en domaine fréquentiel. Il est remarquable que sous certaines conditions d'écoulement et pour des liners particuliers, des instabilités hydrodynamiques au voisinage du liner génératrices de bruit aient été observées expérimentalement [99, 25, 81, 6, 95].

Afin d'optimiser l'utilisation de matériaux absorbants, en aéronautique ou dans d'autres domaines, il convient d'aller plus loin dans l'étude numérique de la propagation acoustique notamment dans des configurations mêlant matériau absorbant et paroi rigide. Il s'agit de plus d'appliquer les outils de stabilité, généralement utilisés dans d'autres domaines de la mécanique des fluides comme l'étude de la transition laminaire-turbulente en couche limite, afin d'avoir une meilleure compréhension des instabilités hydrodynamiques pouvant se développer sur un liner et être à l'origine d'une génération de bruit.

L'analyse modale est en acoustique un outil important. Elle permet d'abord d'étudier théoriquement les propriétés fondamentales de la propagation acoustique au travers de configurations académiques [126]. L'analyse modale est de plus à la base de nombreuses méthodes, comme celle dite de «mode-matching» [107, 55], permettant d'effectuer des calculs de propagation acoustique pour un coût numérique modéré. Cette analyse modale est généralement effectuée numériquement par la méthode des éléments finis ou par collocation spectrale. La méthode Galerkin discontinue, largement utilisée depuis une décennie en aéroacoustique [4, 89], possède les propriétés qui en font une méthode de choix pour le calcul acoustique [115]. À notre connaissance, elle n'a en revanche jamais été utilisée pour l'acoustique modale.

L'étude modale acoustique est généralement conduite dans la section transverse d'un conduit. Son utilisation dans le plan longitudinal du conduit complexifie la modélisation à cause du caractère non borné du domaine d'étude. De plus, l'application de la condition aux limites d'impédance participe aussi à la complexification du problème du fait de la définition de l'impédance en domaine fréquentiel. Si cela ne pose pas de difficultés pour les études courantes en régime harmonique établi, l'étude en domaine temporel a nécessité le développement de nouvelles méthodes [145, 106, 131, 138]. De plus, l'évolution de l'impédance, généralement non linéaire vis-à-vis de la fréquence, complexifie les études modales visant à déterminer les fréquences propres du problème.

Les études numériques menées jusqu'à présent portant sur les instabilités hydrodynamiques se développant sur un liner [93, 16, 96] se sont limitées au cadre simplifié de la stabilité locale où le régime est harmonique et où la configuration étudiée est supposée n'avoir qu'une seule direction non homogène. Dans le cadre d'autres domaines de la mécanique des fluides et en particulier de celui de l'étude de la transition laminaire-turbulente, des méthodes plus avancées [139] ont été développées. Une des méthodes largement employée pour caractériser une dynamique instable dite de type amplificateur de bruit est la recherche de la perturbation initiale optimale qui est une méthode en domaine temporel faisant intervenir les équations adjointes du problème.

L'objectif de cette thèse est ainsi double. Il s'agit d'une part de développer le code de calcul **EMILE** («EigenModes and Instabilities of Linearised Euler equations») pour l'analyse modale (à des fins purement acoustiques ou de stabilité) et la recherche de la perturbation initiale optimale dans un conduit traité acoustiquement au moyen de la méthode Galerkin discontinue à partir d'une version préliminaire du solveur aéroacoustique **SPACE** [47]. D'autre part, cette thèse porte sur l'utilisation d'**EMILE** afin d'étudier par analyse modale la propagation acoustique dans des configurations réalistes ainsi que les croissances transitoires des instabilités hydrodynamiques sur un liner.

Après avoir présenté les principales notions théoriques concernant l'acoustique en milieu guidé ainsi que l'étude de stabilité linéaire (chapitre 2) et les outils numériques employés au cours de cette thèse (chapitre 3), les travaux sont exposés en trois parties. La première partie porte exclusivement sur le code **EMILE**. Nous développons la formulation Galerkin discontinue pour le calcul modal dans la section transverse d'un conduit. Nous présentons de plus l'augmentation en ordre de la discrétisation spatiale ainsi que la méthode numérique retenue pour le calcul modal. Les performances de la méthode en terme de précision et de vitesse d'exécution sont alors évaluées (chapitre 4).

La deuxième partie s'intéresse à l'application du code **EMILE** au calcul modal dans la section transverse d'un conduit avec discontinuité d'impédance. La retranscription d'un article [112] s'intéressant au calcul dans le cas de conduits revêtus d'un matériau absorbant excepté dans de petites régions appelées «splices» est présentée dans un premier temps. L'article porte notamment sur l'étude du comportement de la perturbation acoustique au voisinage des ruptures d'impédance par la méthode Galerkin discontinue. Dans un deuxième temps l'analyse modale est effectuée sur une configuration représentative du banc Aéro-

---

Thermo-Acoustique (B2A) afin d'évaluer l'effet de la géométrie particulière de ce banc où le traitement acoustique ne recouvre pas l'intégralité de la surface inférieure de la veine d'essai (chapitre 5). Cette configuration a notamment donné lieu à une présentation dans une conférence avec acte [111].

La troisième partie est dédiée aussi bien à l'analyse modale qu'à l'étude de stabilité non modale dans le plan longitudinal d'un conduit. Cette configuration étant ouverte, son étude requiert l'implantation de conditions aux limites non réfléchissantes et en particulier l'utilisation de conditions aux limites PML pour les problèmes modaux et non modaux est présentée. D'autre part, le calcul des croissances transitoires étant effectué en domaine temporel et faisant intervenir les équations adjointes, les schémas temporels retenus ainsi que les équations adjointes sont exposés. Nous nous attarderons notamment à démontrer la propriété de consistance de l'adjoint dont fait preuve la méthode Galerkin discontinue (chapitre 6). Outre les conditions aux limites non réfléchissantes, l'effort est porté sur les conditions aux limites modélisant le traitement acoustique. La méthode de Sbardella et collab. [138] est étendue et implantée permettant ainsi la simulation avec un traitement acoustique réaliste en domaine temporel ainsi que l'écriture du problème modal temporel comme un problème aux valeurs propres généralisé linéaire (chapitre 7). Ces outils numériques rendant possible l'étude de stabilité non modale par recherche de la perturbation initiale optimale, les instabilités hydrodynamiques sur liner sont étudiées pour un modèle simplifié de liner ainsi que pour un modèle plus réaliste (chapitre 8).





Première partie

Contexte



## CHAPITRE 2

## PRÉSENTATION DU PROBLÈME

### Sommaire

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Propagation aéroacoustique en milieu guidé</b>     | <b>9</b>  |
| 2.1.1      | Configuration   | 9         |
| 2.1.2      | Équations d'Euler linéarisées                         | 10        |
| 2.1.3      | Acoustique modale en milieu guidé                     | 12        |
| <b>2.2</b> | <b>Modélisation des liners</b>                        | <b>14</b> |
| 2.2.1      | Introduction  | 14        |
| 2.2.2      | Acoustique modale en présence de liner                | 17        |
| 2.2.3      | Propagation acoustique avec liner en domaine temporel | 18        |
| <b>2.3</b> | <b>Analyse de stabilité</b>                           | <b>20</b> |
| 2.3.1      | Lien entre acoustique et stabilité                    | 20        |
| 2.3.2      | L'approche modale                                     | 21        |
| 2.3.3      | Amplificateur de bruit et résonateur                  | 22        |
| 2.3.4      | Les limites de l'approche modale                      | 24        |
| 2.3.5      | Instabilité hydrodynamique sur liner                  | 25        |
| <b>2.4</b> | <b>Bilan</b>  | <b>30</b> |

## 2.1 Propagation aéroacoustique en milieu guidé

### 2.1.1 Configuration

Notre travail porte sur l'étude de la propagation acoustique en conduit traité acoustiquement. La propagation d'onde en milieu guidé se retrouve dans plusieurs domaines : nacelle de turboréacteur, pot d'échappement d'automobile, conduit de ventilation, acoustique des salles ...

Dans ce manuscrit de thèse sera par exemple étudiée la propagation acoustique dans le Banc Aéro-Thermo-Acoustique (B2A) de l'Onera, dont la cellule d'expérimentation est représentée figure 2.1. Le banc B2A est, entre autres, utilisé pour l'étude expérimentale d'un matériau absorbant en présence d'écoulement (jusqu'à Mach 0,4), matériau représenté en violet figure 2.1. Des haut-parleurs en amont de la cellule d'expérimentation servent de source d'excitation acoustique, avec  $[300; 3500]$  Hz pour gamme de fréquence utile.

De façon générale, l'étude de la propagation aéroacoustique en conduit sera effectuée dans cette thèse en considérant deux configurations :

- La configuration dite longitudinale où sera étudiée la propagation acoustique dans le plan du conduit.
- La configuration dite transverse où le domaine d'étude sera limité à une section transverse du conduit, ce dernier étant considéré infiniment long.

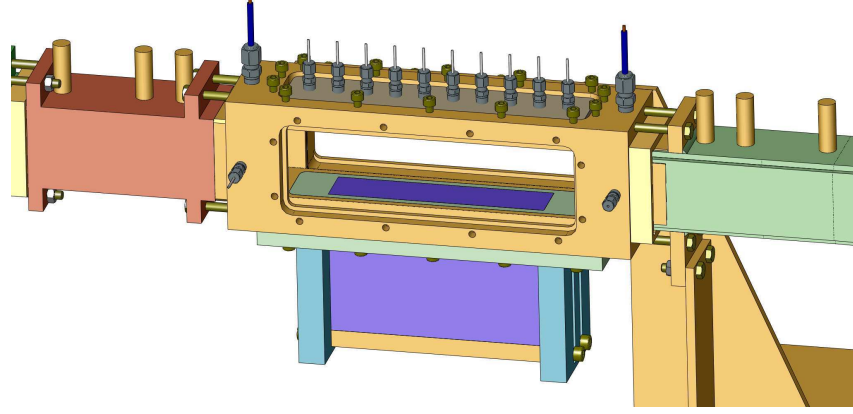


FIGURE 2.1 – Cellule d’expérimentation du banc B2A. Le matériau absorbant est représenté en violet.

Les configurations longitudinales et transverses dans le cas du banc B2A sont représentées respectivement figures 2.2(a) et 2.2(b). Le domaine d’étude est donc toujours bidimensionnel et appartient toujours au plan  $(x,y)$ . Ainsi, dans la configuration longitudinale l’axe du conduit correspondra à l’axe  $x$  tandis que dans le cas transverse, l’axe du conduit correspondra à l’axe  $z$ .

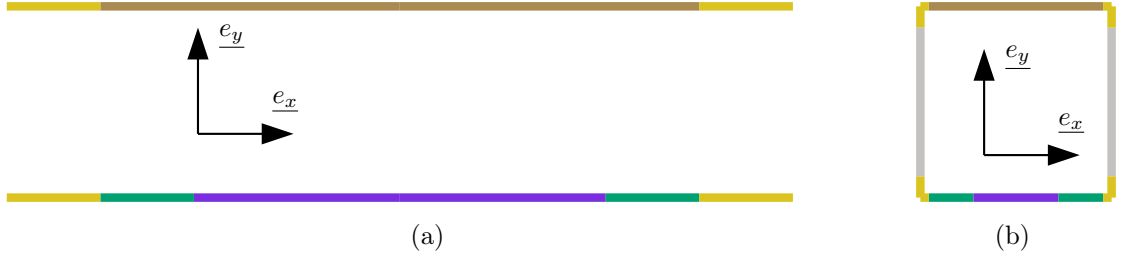


FIGURE 2.2 – Configurations longitudinale (a) et transverse (b) du banc B2A (jeu de couleurs similaire à la figure 2.1).

### 2.1.2 Équations d’Euler linéarisées

L’aérodynamique au sein du conduit est régie par les équations de Navier-Stokes. Étant donné que cette thèse se place dans un cadre acoustique, nous nous restreindrons à l’étude des phénomènes perceptibles par l’oreille humaine. Comme expliqué par Rienstra et Hirschberg [128, chapitre 2], le seuil de douleur, correspondant au niveau d’intensité sonore à partir duquel l’oreille subit des dommages irréversibles lors d’une écoute prolongée, correspond à des fluctuations de pression de valeur efficace  $p_{rms} = 200$  Pa. En notant ici  $p_a$  la pression atmosphérique ( $p_a \approx 10^5$  Pa), la très faible valeur du rapport  $p_{rms}/p_a = O(10^{-3})$  justifie la décomposition de l’écoulement  $\mathbf{Q}$  entre un écoulement porteur stationnaire  $\mathbf{Q}_0$  et une perturbation acoustique  $\varepsilon \mathbf{q}$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . L’écoulement stationnaire  $\mathbf{Q}_0$  est pris comme une donnée du problème dont l’inconnue est la perturbation acoustique. La faible amplitude de cette dernière permet la linéarisation des équations. En outre, Rienstra et Hirschberg [128, chapitre 2] montrent aussi que la viscosité a un impact très faible sur la propagation acoustique et peut donc être négligée<sup>1</sup>.

On se limitera aux fluides parfaits se comportant comme des gaz idéals en supposant de plus un écoulement porteur subsonique. La physique de l’écoulement  $\mathbf{Q} = \{\tilde{\rho}; \tilde{\mathbf{U}}; \tilde{P}; \tilde{S}\}$  est alors régie par les équations d’Euler composées de l’équation de continuité (2.1a) et de l’équation de quantité de mouvement (2.1b). L’équation de l’entropie ( $d_t \tilde{S} = 0$ ) est choisie comme équation de l’énergie et est associée à l’équation d’état  $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{\rho}, \tilde{S})$ .

$$\partial_t \tilde{\rho} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \quad (2.1a)$$

1. Négliger la viscosité peut en revanche rendre un mode hydrodynamique convectivement instable absolument instable [96]. La viscosité joue le rôle d’un paramètre régulier vis-à-vis des instabilités hydrodynamiques se développant sur un liner.

$$\tilde{\rho} \partial_t \tilde{U} + \tilde{\rho} \tilde{U} \cdot \nabla \tilde{U} + \nabla \tilde{P} = 0 \quad (2.1b)$$

L'écoulement  $\mathbf{Q} = \{\tilde{\rho}; \tilde{U}; \tilde{P}; \tilde{S}\}$  est décomposé entre un écoulement porteur et une petite perturbation acoustique :  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \varepsilon \mathbf{q} = \{\rho_0; U_0; p_0\} + \varepsilon\{\rho; u; p\}$ . De par l'homentropicité<sup>2</sup>, l'équation de l'énergie peut s'écrire en notant  $a_0$  la vitesse du son [14, section 3.1.3] :

$$\begin{cases} p_0 = \frac{a_0^2 \rho_0}{\gamma}, \\ p = a_0^2 \rho, \end{cases}$$

et l'entropie est omise dans  $\mathbf{Q}_0$  et  $\mathbf{q}$ . En injectant alors  $\mathbf{Q}_0 + \varepsilon \mathbf{q}$  dans les équations d'Euler (2.1a), (2.1b) et en retenant les termes d'ordres  $O(\varepsilon)$ , les équations d'Euler linéarisées sont obtenues :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \underline{A}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{B} \underline{\varphi} = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad (2.2)$$

avec  $\underline{\varphi} = (\underline{u}; a_0 \frac{\rho}{\rho_0})^T$  la perturbation acoustique. Dans ce travail de thèse, nous supposons  $\rho_0$ ,  $a_0$  et  $p_0$  constants. La variable  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  est ainsi simplement proportionnelle à la pression acoustique :

$$a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{a_0 \rho_0}.$$

Les étapes intermédiaires ainsi que la forme plus générale dans le cas où  $\rho_0$ ,  $a_0$  et  $p_0$  ne sont pas constants sont données en annexe A.

➤ Remarque : Le code développé lors de cette thèse étant basé sur le code **SPACE**, dont la formulation est donnée dans les références [47, 153], les équations d'Euler linéarisées sont écrites sous la même forme ce qui explique l'utilisation de la variable  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ .

Dans le cas longitudinal, la vitesse acoustique s'écrit  $\underline{u} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$  et les matrices de eq. (2.2) sont

$$\underline{A}_x = \begin{pmatrix} U_0 & 0 & a_0 \\ 0 & U_0 & 0 \\ a_0 & 0 & U_0 \end{pmatrix}, \underline{A}_y = \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0 & a_0 \\ 0 & a_0 & V_0 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} \partial_x U_0 & \partial_y U_0 & 0 \\ \partial_x V_0 & \partial_y V_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas transverse, la vitesse acoustique s'écrit  $\underline{u} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$  et les matrices de eq. (2.2) sont

$$\begin{aligned} \underline{A}_x &= \begin{pmatrix} U_0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & U_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & U_0 \end{pmatrix}, \underline{A}_y = \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & V_0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & V_0 \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_z &= \begin{pmatrix} W_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_0 & a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & W_0 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} \partial_x U_0 & \partial_y U_0 & 0 & 0 \\ \partial_x V_0 & \partial_y V_0 & 0 & 0 \\ \partial_x W_0 & \partial_y W_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par la suite, les équations d'Euler linéarisées (2.2) seront utilisées sous deux autres formes :

$$\partial_t \underline{\varphi} = \underline{L} \underline{\varphi} \quad (2.3a)$$

et

$$\underline{H} \underline{\varphi} = 0 \quad (2.3b)$$

avec  $\underline{L} = -\underline{A}_j \partial_j - \underline{B}$  le Jacobien et  $\underline{H} = \partial_t - \underline{L}$ . De plus, l'opérateur d'évolution temporelle  $\underline{T}(s)$  est défini par :

$$\underline{\varphi}(t+s) = \underline{T}(s) \underline{\varphi}(t). \quad (2.4)$$

2. En supposant l'écoulement adiabatique (c'est-à-dire en absence d'apport de chaleur extérieure massique et par conduction) et réversible, l'écoulement est dit isentropique. En faisant de plus l'hypothèse d'une distribution d'entropie uniforme à l'infini amont, l'homentropicité est acquise [14, section 3.1.1].

Les équations d'Euler linéarisées (2.2) sont associées à trois types de conditions aux limites :

- ❶ Une condition d'imperméabilité est imposée sur la perturbation acoustique au niveau d'une paroi rigide :  $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ , en notant  $\underline{n}$  le vecteur unitaire normal à la paroi.
- ❷ Au niveau d'une paroi traitée acoustiquement, une condition d'impédance est imposée entre la pression et la vitesse normale à la paroi de la perturbation acoustique (voir section 2.2).
- ❸ Dans le cas d'une configuration longitudinale, des conditions absorbantes et non réfléchissantes sont imposées en amont et aval pour borner le domaine de calcul (voir section 3.2).

### Écriture de la perturbation sous la forme d'une onde

Du fait de la stationnarité de l'écoulement de base, il est courant de chercher la perturbation acoustique sous une forme harmonique :

$$\underline{\varphi}(\underline{x}, t) = \underline{\varphi}(\underline{x})e^{-i\omega t} , \quad (2.5)$$

et les équations d'Euler linéarisées s'écrivent alors sous forme harmonique :

$$-i\omega \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} = \underline{0} \text{ dans } \Omega . \quad (2.6)$$

De plus, dans le cas d'une configuration transverse, l'invariance du problème en  $z$  permet d'écrire la perturbation sous la forme d'une onde :

$$\underline{\varphi}(x, y, z, t) = \underline{\varphi}(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)} , \quad (2.7)$$

et les équations s'écrivent alors :

$$ik \underline{\underline{A}}_z \underline{\varphi} = i\omega \underline{\varphi} - \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\varphi} - \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi} - \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} . \quad (2.8)$$

Dans le cadre de cette thèse la «convention stabilité» est choisie et résulte dans les formes d'ondes eqs. (2.5) et (2.7). D'autres études préfèrent adopter la «convention acoustique» qui consiste à imposer les formes d'ondes  $\underline{\varphi}(\underline{x}, t) = \underline{\varphi}(\underline{x})e^{i\omega t}$  et  $\underline{\varphi}(x, y, z, t) = \underline{\varphi}(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}$ .

Comme nous le verrons en section 2.1.3, dans le cas où la perturbation est sous la forme eq. (2.7), il est courant de fixer  $\omega$  comme réel et de déterminer le ou les nombres complexes  $k_z$  et l'analyse est dite alors spatiale. L'analyse temporelle correspond au cas d'une perturbation sous la forme eq. (2.5) où  $\omega$  est l'inconnue du problème complexe.

### 2.1.3 Acoustique modale en milieu guidé

#### 2.1.3.1 Acoustique modale en milieu guidé et propagation acoustique (paroi rigide)

Lors de l'étude dans une configuration transverse, il est courant de fixer la pulsation  $\omega$  à une valeur réelle liée à la physique du problème. Pour une étude du banc B2A, elle est donnée par le choix de la fréquence du signal émis par les haut-parleurs tandis que lors d'une étude d'un conduit circulaire modélisant une nacelle de turboréacteur, elle sera fixée à partir de la fréquence des modes générés par la rotation de la soufflante. Le nombre d'onde  $k_z$  est alors recherché comme valeur propre de l'équation matricielle (2.8) et  $\underline{\varphi}$  comme vecteur propre associé. Si le conduit considéré est de géométrie rectangulaire ou circulaire et traversé par un écoulement de base uniforme et axial, il existe des solutions analytiques données en annexe B. Ce cas d'étude, bien que relativement simple, permet de comprendre les notions fondamentales de la propagation en milieu guidé mais aussi d'évaluer l'effet de paramètres comme la fréquence ou la valeur du nombre de Mach. Il est par exemple possible de montrer qu'il existe pour un mode donné une fréquence dite de coupure en dessous de laquelle ce mode sera évanescent. Pour quantifier à quel point un mode contribue à l'énergie acoustique dans un conduit, il est pratique d'utiliser ce qui sera appelé par la suite le coefficient de propagation («cut-on ratio» en anglais) défini par :

$$\eta = \left| \sqrt{1 - \left( M + (1 - M^2) \frac{k_z}{\omega} \right)^2} \right| . \quad (2.9)$$

Dans le cas où l'écoulement est uniforme dans le conduit avec nombre de Mach  $M$ , cette définition permet d'avoir  $\eta > 1$  pour les modes évanescents et  $\eta < 1$  pour les modes propagatifs.

➤ Remarque : Dans le cas d'une configuration longitudinale invariante par rapport à la direction axiale  $x$  et sous les hypothèses d'un écoulement uniforme et axial, une solution analytique existe (voir annexe B) et correspond en fait à une simplification de la solution analytique obtenue dans la section transverse d'un conduit à section rectangulaire de même hauteur et parcourue par un écoulement uniforme et axial.

Pour des géométries plus complexes ou en présence d'écoulements cisailés, l'obtention de solutions analytiques est moins évidente mais peut être possible dans certains cas [15]. Sinon, la résolution se fait numériquement, par exemple par collocation spectrale ou par méthode des éléments finis.

### Méthodes pour le calcul de la propagation acoustique en conduit à partir d'une résolution modale

En plus de permettre une compréhension des propriétés fondamentales de la propagation acoustique en milieu guidé, le calcul modal présenté ci-dessus est à la base d'outils permettant le calcul sur des géométries tridimensionnelles beaucoup plus rapide qu'une résolution directe. À partir d'une méthode (analytique ou numérique) de calcul des modes propres dans une section de conduit, nous retiendrons trois méthodes permettant le calcul de la propagation acoustique dans des conduits variants selon l'axe du conduit :

- La méthode des échelles multiples permet l'étude de conduits lentement variables. Cette méthode fut proposée dans un premier temps par Nayfeh et Telionis [104] puis améliorée par Rienstra [130] en apportant une correction sur la définition de l'écoulement de base.
- La méthode de «mode-matching» [107] permet le calcul dans des conduits présentant des discontinuités. L'idée de la méthode est de décomposer de part et d'autre de la discontinuité la solution sur la base des modes propres puis d'imposer l'égalité de la vitesse axiale et de la pression des deux décompositions au niveau de la discontinuité. Un des principaux inconvénients de cette méthode est qu'en présence d'écoulement, elle ne s'applique qu'à des conduits de géométrie invariante selon l'axe du conduit.
- La méthode de Wiener-Hopf [105], plus complexe, permet la résolution d'équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites discontinues. Nous présentons ici les grandes lignes de la méthode, pour plus de détails nous invitons le lecteur à se tourner vers la référence [45] (celle-ci permettant une compréhension aisée de la méthode au travers d'exemples de difficulté croissante). Soit une configuration longitudinale (c'est-à-dire dans le plan  $(x; y)$ ) invariante pour  $x < 0$  et pour  $x > 0$  présentant une discontinuité en  $x = 0$ . La première étape de la méthode de Wiener-Hopf consiste à considérer la pulsation comme complexe  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  où la partie imaginaire  $\omega_i$  est choisie suffisamment élevée afin de satisfaire une condition de causalité traduisant une condition de rayonnement. À la fin des étapes de calculs, la solution réelle est obtenue en prenant  $\omega_i \rightarrow 0$ . La deuxième étape consiste à écrire la transformée de Fourier des équations et des conditions aux limites du problème. Cette étape fait intervenir les transformées de Fourier partielles d'inconnues du problème, par exemple la pression  $p$ , notées avec les exposants  $\pm$  :

$$\begin{cases} P^+(s) = \int_0^\infty p(x)e^{isx} dx, \\ P^-(s) = \int_{-\infty}^0 p(x)e^{isx} dx, \end{cases}$$

où  $s \in \mathbb{C}$  est le nombre d'onde. Il est alors possible de montrer qu'une fonction  $+$  (respectivement  $-$ ) est analytique dans  $R^+$  (respectivement  $R^-$ ), demi-plan supérieur (respectivement inférieur) de  $\mathbb{C}$ . De plus, il existe un domaine  $\mathcal{S}$  non vide où les fonctions notées  $+$  et  $-$  sont analytiques :  $\mathcal{S} = R^+ \cap R^-$ . La combinaison des transformées de Fourier (partielles ou non) des équations et conditions aux limites du problème va permettre d'écrire l'équation de Wiener-Hopf du problème. Cette dernière s'écrit comme une combinaison linéaire de transformées de Fourier partielles des inconnues du problème, par exemple  $P^+(s)$  et  $P^-(s)$ , ainsi qu'une fonction  $K(s)$  appelé noyau de Wiener-Hopf. L'étape suivante est appelée factorisation de Wiener-Hopf et consiste à factoriser  $K(s)$  comme

le produit de deux fonctions  $K^+(s)$  et  $K^-(s)$  analytiques dans  $R^+$  et  $R^-$  respectivement. En réinjectant  $K(s) = K^+(s)K^-(s)$  dans l'équation de Wiener-Hopf, celle-ci fait maintenant intervenir un terme analytique dans  $R^+$ , un terme analytique dans  $R^-$  et un troisième analytique ni dans tout  $R^-$  ni dans tout  $R^+$ . En raisonnant sur les pôles de ce dernier terme il est possible de le factoriser en la somme d'une fonction analytique dans  $R^+$  et d'une fonction analytique dans  $R^-$ . Une égalité est ainsi finalement obtenue entre un terme analytique dans  $R^+$  et un autre analytique dans  $R^-$ . Par prolongement analytique, il est ainsi possible de définir une fonction, notée  $E(s)$ , analytique dans  $\mathbb{C}$ . De plus, il est montré que  $E(s)$  admet au plus une croissance algébrique à l'infini et est donc un polynôme en vertu du théorème de Liouville étendu, ce polynôme étant souvent nul ou constant. Il est alors possible de remonter aux transformées de Fourier d'inconnues du problème et donc d'obtenir par transformée de Fourier inverse sur  $\mathcal{S}$  la solution du problème. Cette méthode permet par exemple de prendre en compte le caractère non infini d'un conduit et ainsi de calculer le bruit rayonné en champ lointain par l'embouchure d'un conduit [87, 56].

### 2.1.3.2 Modes acoustiques résonants et modes acoustiques piégés

Considérons le cas sans écoulement d'une configuration longitudinale constituée d'un conduit fermé (une «boîte») de hauteur  $H$  et de longueur  $L$ . Dans ce cas, la perturbation acoustique est sous la forme eq. (2.5) et l'analyse modale (alors temporelle) consiste à déterminer  $\omega$  comme valeur propre de eq. (2.6). Pour cette configuration (donnée en annexe section B.2.3), les valeurs propres  $\omega$  sont réelles et les modes correspondant ne sont donc pas amortis, cela s'expliquant par le caractère non visqueux de la propagation acoustique et par le fait que les parois rigides sont parfaitement réfléchissantes.

En revanche, dans le cas de conduits ouverts, les modes sont amortis du fait de leur rayonnement à l'infini et sont appelés modes de fuite («leaky modes» en anglais). Une zone de non-homogénéité selon l'axe du conduit (présence d'une cavité, objet(s) placé(s) dans le conduit) peut provoquer l'apparition de modes, appelés modes résonants, caractérisés par une valeur élevée du facteur de qualité ( $Q = |\Re(\omega)/(2\Im(\omega))|$ ) [65, 110].

Il existe de plus dans certaines configurations des modes, appelés modes «piégés» («trapped modes» en anglais), localisés dans une région limitée du conduit [51, 49]. À titre d'exemple, la figure 2.3 représente un mode acoustique piégé dans une cavité tiré de la référence [49]. Du fait de leur caractère localisé, ces modes ne rayonnent pas d'énergie et sont donc mathématiquement définis tels que leurs valeurs propres associées  $\omega$  soient purement réelles.

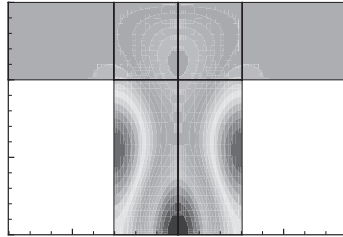


FIGURE 2.3 – Exemple de mode piégé dans une cavité (source [49])

## 2.2 Modélisation des liners

### 2.2.1 Introduction

L'utilisation de matériaux absorbants, aussi appelés «liners», est courante pour réduire le bruit émis par un milieu guidé : nacelle de turboréacteur, conduit d'aération, pot d'échappement d'une automobile... Dans le cadre de cette thèse, nous nous restreignons à l'étude de liners dits à réaction localisée. Pour de tels liners, l'absorption acoustique d'une onde ne dépend pas de l'angle d'incidence de celle-ci. Ainsi l'étude de liners constitués de matériaux poreux n'est pas traitée et nous nous limitons à l'étude de liners constitués d'une plaque perforée placée sur une structure en nid d'abeille. Cette configuration, courante dans le monde aéronautique, est représentée figure 2.4.



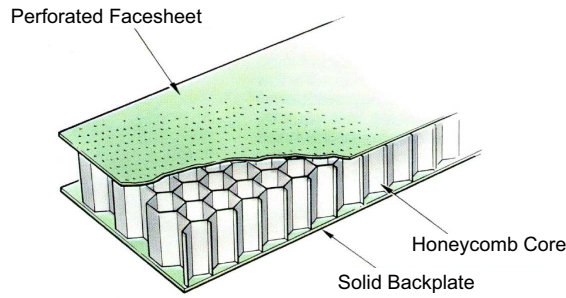


FIGURE 2.4 – Schéma d'un liner formé d'une structure en nid d'abeille recouverte d'une plaque perforée et reposant sur une paroi rigide (source [131]).

### 2.2.1.1 Conditions aux limites d'impédance

Afin de s'affranchir du calcul de la physique complète au sein d'un liner, une condition aux limites dite d'impédance est utilisée au niveau de celui-ci. Elle lie la pression et la vitesse normale au liner de la perturbation acoustique et est définie par l'équation :

$$\tilde{Z} = \frac{p}{\underline{u} \cdot \underline{n}}, \quad (2.10)$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant du fluide.  $\tilde{Z}$  est appelée impédance, sa partie réelle résistance, sa partie imaginaire réactance et son inverse admittance, notée  $\tilde{Y}$ . L'impédance spécifique  $Z$  est définie comme

$$Z = \frac{\tilde{Z}}{a_0 \rho_0} \text{ soit } Z = \frac{a_0 \frac{\rho}{\rho_0}}{\underline{u} \cdot \underline{n}}. \quad (2.11)$$

➤ **Remarque :** Par la suite, l'impédance spécifique sera principalement utilisée et sera abusivement appelée impédance. Le symbole  $\tilde{\phantom{x}}$  sera ponctuellement utilisé pour les variables relatives à l'impédance (non spécifique).

La condition aux limites d'impédance (2.11) n'est valide que dans le cas où l'écoulement de base satisfait une condition aux limites d'adhérence sur le liner. Dans le cas contraire, il y a à la paroi une ligne de glissement<sup>3</sup> dont la dynamique doit être prise en compte. Pour cela, la condition aux limites d'impédance d'Ingard-Myers [79, 102] est généralement utilisée :

$$Z = \frac{(-i\omega + \underline{U}_0 \cdot \nabla - (\underline{n} \cdot \nabla \underline{U}_0) \cdot \underline{n}) a_0 \frac{\rho}{\rho_0}}{-i\omega \underline{u} \cdot \underline{n}} \quad (2.12)$$

L'utilisation de cette condition aux limites fait actuellement débat, ce point sera traité en section 2.3.5.1.

### 2.2.1.2 Modèles d'impédance

L'impédance  $Z$  est définie dans le domaine fréquentiel. La fréquence de résonance  $\omega_c$  d'un liner est définie telle que  $\Im(Z(\omega_c)) = 0$ .

Parmi les nombreux modèles d'impédance existants, on retiendra le modèle à trois paramètres [145], aussi appelée modèle masse-ressort-amortisseur, donné par (où  $M$  est la masse,  $R$  l'amortissement et  $b$  la raideur) :

$$Z(\omega) = R - iM\omega + \frac{ib}{\omega} \quad (2.13)$$

ainsi que le modèle EHR («Extended Helmholtz Resonator»), défini par :

$$Z(\omega) = R - iM\omega + i\phi \cotan\left(\frac{\omega h}{a_0} + i\frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (2.14)$$

---

3. Modélisation en fluide parfait d'une couche limite

Ce modèle, proposé par Rienstra [131], est une évolution du modèle du résonateur d'Helmholtz standard (appelé aussi modèle de Ko par Richter et collab. [124]) obtenu pour  $\varepsilon = \phi = 0$ . Il modélise un liner constitué d'une plaque perforée de résistance  $R$  et de réactance de masse  $iM\omega$  et d'un matériau en nid d'abeille dont les cavités sont de hauteur  $h$ . Le terme de résistance  $R$  correspond à un terme d'amortissement par viscosité au travers des perforations de la plaque perforée. Dans le terme de réactance de masse,  $M$  correspond à la masse d'air se déplaçant dans une perforation. Le terme en cotan (avec  $\varepsilon = 0$ ) représente le modèle d'impédance dit quart d'onde<sup>4</sup> modélisant la propagation acoustique unidimensionnelle au sein des cavités. Dans la limite  $\omega \rightarrow 0$ <sup>5</sup>, l'expression d'un résonateur d'Helmholtz est retrouvée [128, section 5.2.3] [124, section 2.1.1], d'où le nom du modèle d'impédance.

Un cas d'étude simple présenté par Malmary [91, chapitre 1] permet d'illustrer simplement l'effet d'une cavité combinée ou non d'une plaque perforée. Soit un conduit de section  $S$  sur lequel est connecté une cavité circulaire de section  $s$  et de longueur  $h = L$  à fond rigide. Une onde plane incidente de pression  $p_i$  est émise et nous notons  $p_r$  et  $p_t$  les pressions réfléchie et transmise respectivement, voir figure 2.5(a). L'impédance est :

$$Z(\omega) = Z_p + i \cotan\left(\frac{\omega h}{a_0}\right),$$

où  $Z_p$  correspond à l'impédance de la plaque perforée. Malmary montre que le coefficient de transmission s'écrit :

$$\alpha_t = \left| \frac{p_t}{p_i} \right|^2 = \left| \frac{Z}{\frac{s}{2S} + Z} \right|^2.$$

Sur la figure 2.5(b) sont tracées les évolutions du coefficient de transmission pour différentes valeurs de  $Z_p$  (avec  $s/S = 0,5$ ). Il est ainsi montré qu'une cavité (courbe avec  $Z_p = 0$ ) a pour effet d'absorber sur une gamme de fréquence réduite centrée autour de la résonance du résonateur quart d'onde, définie par  $\cotan(\omega h/a_0) = 0$  soit  $\omega = a_0\pi/(2h)$ . L'ajout d'une plaque perforée va alors modifier le spectre d'absorption. Plus précisément, la résistance de la plaque perforée va atténuer la valeur du pic d'absorption en élargissant par contre sa largeur et la réactance apportée par la plaque perforée va modifier la position du pic.

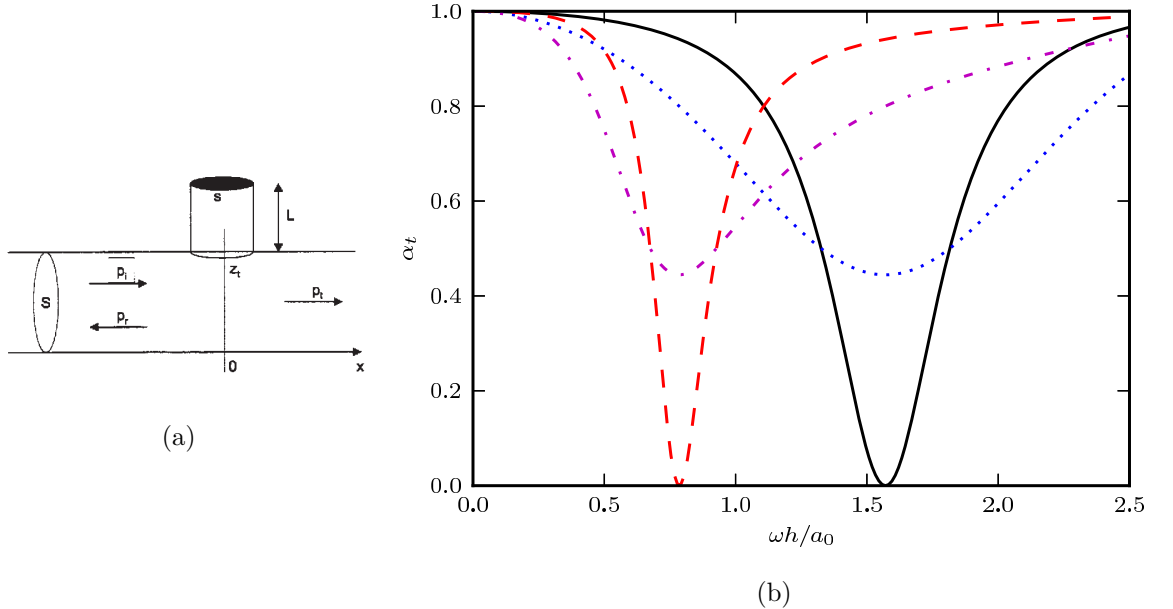


FIGURE 2.5 – Géométrie permettant l'étude théorique de l'effet d'une cavité associée ou non à une plaque perforée (a) (source [91]). Coefficient de transmission (b) avec  $Z_p = 0$  (—),  $Z_p = 0,5$  (.....),  $Z_p = -i$  (---) et  $Z_p = 0,5 - i$  (-.-.) (d'après [91]).

4. La relation de dispersion dans la cavité étant  $\omega = a_0 k$ , la longueur d'onde de l'onde acoustique pour la pulsation de résonance  $\omega_c = a_0\pi/(2h)$  est  $\lambda = 4h$  d'où l'appellation résonateur quart d'onde.

5.  $\cotan(x) = \frac{1}{x} + o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$

$\varepsilon$  représente un terme d'amortissement au sein des cavités. La signification physique du terme  $\phi$  est moins claire. Rienstra [131] parle simplement d'un paramètre permettant de faire varier la réactance de la cavité. Aurégan et Leroux [6] et Richter [123] le considèrent comme correspondant à l'inverse de la porosité.

➤ Remarque : Ayant opté pour la convention stabilité où la dépendance temporelle s'écrit  $\varphi \sim e^{-i\omega t}$ ,  $Z(\omega)$  correspond au conjugué complexe des modèles définis dans le cadre d'une convention acoustique ( $\varphi \sim e^{i\omega t}$ ).

### Admissibilité d'un modèle d'impédance

Un théorème dû à Rienstra [131, section 3] montre qu'un modèle d'impédance doit satisfaire quatre conditions pour être physiquement acceptable. Ces quatre conditions traduisent le fait que, pour être physique, le problème doit être causal, réel et le liner passif. La violation d'une de ces conditions est réductrice à l'utilisation d'un modèle d'impédance en domaine temporel et pourra mener à l'apparition d'instabilités non physiques. Les modèles d'impédances eqs. (2.13) et (2.14) satisfont ces quatre conditions et peuvent ainsi être utilisés en domaine temporel comme nous le verrons en section 2.2.3.

#### 2.2.2 Acoustique modale en présence de liner

Comme dans le cas du conduit à paroi rigide présenté section 2.1.3, la recherche du nombre d'onde  $k_z$  comme valeur propre du problème eq. (2.8) associée au vecteur propre  $\varphi$  peut donner lieu à des solutions analytiques dans certains cas simples (le cas d'un conduit circulaire traité acoustiquement sans écoulement et le cas d'un conduit rectangulaire avec liner et écoulement uniforme sont présentés en annexe B). Ces configurations, bien que très académiques, permettent de mettre en évidence aisément l'effet des matériaux absorbants sur la propagation acoustique en conduit. Il peut par exemple être constaté que les nombres d'onde sont tous complexes, ce qui traduit l'atténuation provoquée par le liner. De façon remarquable, ces cas d'étude simplifiés mettent en lumière l'existence d'un nouveau type de modes appelés modes de surface [126, 21]. Dans le cas d'un conduit circulaire en absence d'écoulement, jusqu'à deux de ces modes acoustiques apparaissent pour une valeur de l'ordre azimutal  $m$  donnée quand on a  $\Im(Z) > 0$  et  $\omega \gg 1$ . En présence d'un écoulement uniforme, deux modes de surface hydrodynamiques font leur apparition. Ces modes de surface se distinguent par le fait qu'ils n'existent que dans le voisinage des parois traitées acoustiquement.

Malgré l'absence, d'une distinction claire en présence de liner sur les nombres d'onde entre modes propagatifs et modes évanescents (les nombres d'onde étant tous complexes), l'utilisation du coefficient de propagation défini par eq. (2.9) permet toujours de quantifier à quel point un mode contribue à l'énergie acoustique dans un conduit [55].

##### 2.2.2.1 Présence d'une jonction paroi-rigide liner

Un conduit n'est généralement pas intégralement recouvert d'un matériau absorbant et présente des parois rigides. Cela donne lieu sur les surfaces des conduits à l'existence de jonctions entre des parois rigides et des parois revêtues d'un traitement acoustique. Dans le cas du conduit B2A représenté figures 2.1 et 2.2(a)(b), de telles jonctions sont présentes aussi bien dans une section transverse du conduit que dans le plan longitudinal du conduit. Ces deux types de discontinuités se retrouvent dans les nacelles de turboréacteurs, voir figure 2.6. En effet, pour des raisons de fabrication, il reste après la pose des liners de petites régions dépourvues de traitement acoustique et appelées en anglais «splice». Une revue exhaustive des études expérimentales et numériques portant sur l'influence des splices est donnée par Brambley et collab. [24]. Hormis la référence [147] s'intéressant au calcul des diffraction et réflexion acoustiques induites par une discontinuité d'impédance par la méthode des différences finies (à noter la nécessité de filtrer les modes numériques parasites), les études en présence de telles discontinuités sont généralement menées en ne prenant que la pression comme inconnue via l'équation de Pridmore-Brown.

Bi [12] s'est intéressé au calcul des modes acoustiques dans une section transverse de conduit non uniformément traité avec écoulement uniforme par la méthode multi-modale. Cette dernière consiste à chercher la solution comme une combinaison des modes obtenus dans les cas où les parois sont rigides ou uniformément linées (bien que dans ce dernier cas les modes ne forment pas une base complète). Brambley

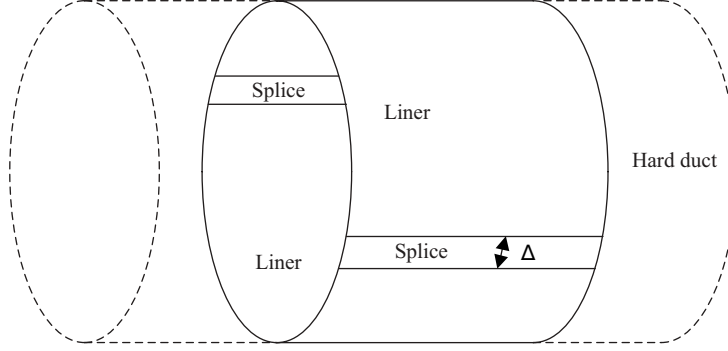


FIGURE 2.6 – Discontinuités d'impédance dans un conduit représentant une nacelle de turboréacteur (source [157]).

et collab. [24] ont proposé une méthode pour le calcul de modes acoustiques dans la section transverse d'un conduit de géométrie quelconque et portant un écoulement cisailé. Leur méthode est basée sur les fonctions de Green et consiste à chercher les modes propres sous la forme de série de Fourier. Enfin le calcul de modes dans la section transverse d'un conduit présentant des discontinuités d'impédance a été réalisé au moyen de la méthode des éléments finis dans les références [157, 55] et par une technique de collocation multidomaines basée sur les polynômes de Chebychev par Brazier [29].

En présence de splices, Bi et collab. [13] ont montré l'existence d'un nouveau type de modes appelés modes localisés. Ces modes sont caractérisés par le fait qu'ils n'existent que dans le voisinage de la splice. Ils ont montré que ces modes sont originellement des modes de surface, dans le cas sans discontinuité d'impédance, qui deviennent des modes acoustiques lorsque la taille de la splice augmente.

La méthode de mode-matching, voir section 2.1.3, permet le calcul de la propagation acoustique dans un conduit présentant des discontinuités d'impédance dans le plan longitudinal du conduit à partir d'un moyen de calcul de modes acoustiques dans une section transverse du conduit [157]. Gabard et Astley [55] ont proposé une amélioration de la méthode en n'imposant non pas l'égalité de la vitesse axiale et de la pression à la discontinuité mais en écrivant une formulation variationnelle à partir des équations du problème. Récemment, Wang et Sun [155] ont proposé une méthode aussi basée sur la segmentation du conduit. Elle permet notamment la prise en compte de liner à réaction non localisée et le calcul dans des conduits à géométrie variable avec écoulement. Les références [132, 17] portent sur le calcul des réflexions et diffractions acoustiques induites par une jonction paroi rigide-liner au moyen de la méthode de Wiener-Hopf (mentionnée en section 2.1.3).

### 2.2.3 Propagation acoustique avec liner en domaine temporel

Un liner étant caractérisé par un modèle impédance  $Z$  défini dans le domaine fréquentiel, son utilisation en domaine temporel n'est pas immédiate. D'un point de vue pratique l'utilisation du produit de convolution

$$\begin{cases} a_0 \frac{p}{\rho_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(t - \tau) v(\tau) d\tau \\ z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases}$$

permettant l'écriture de la condition d'impédance en domaine temporel représente un coût bien trop élevé aussi bien d'un point de vue du temps de calcul que d'un point de vue du stockage. Trois méthodes sont présentées ici permettant de s'affranchir de ce produit de convolution.

#### 2.2.3.1 Passage en domaine temporel par transformée en $z$

La transformée en  $z$ , généralement utilisée en traitement du signal, permet de passer d'une représentation fréquentielle à un signal temporel discret, ce dernier pouvant être vu comme un signal continu multiplié par une série de fonctions Dirac. Son application en acoustique a été proposée par Özyörük et

Long [106] et passe par l'écriture de l'impédance comme une fonction de  $\exp(i\omega T_l)$ , où  $T_l$  correspond à la période d'échantillonnage du signal temporel discret. Cela permet de tirer avantage de la formule ( $\delta$  est la fonction Dirac)<sup>6</sup> :

$$\delta(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.15)$$

Dans la référence [131], Rienstra, après avoir défini le modèle EHR (présenté en section 2.2.1.2), montre son utilisation en domaine temporel au moyen de la transformée en  $z$ . Pour cela,  $T_l$  est choisi comme  $T_l = \frac{2h}{a_0}$  et l'impédance (eq. (2.14)) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= R - iM\omega + i\phi \cotan\left(\omega \frac{T_l}{2} + i\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{(e^{i\omega T_l} e^{-\varepsilon} - 1)(R - i\omega M) - \phi(e^{i\omega T_l} e^{-\varepsilon} + 1)}{e^{i\omega T_l} e^{-\varepsilon} - 1}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule eq. (2.15), la transformée de Fourier inverse donne :

$$p(t) - p(t - T_l)e^{-\varepsilon} = (R + \phi)\underline{u}(t) \cdot \underline{n} + (\phi - R)e^{-\varepsilon}\underline{u}(t - T_l) \cdot \underline{n} + M\partial_t \underline{u}(t) \cdot \underline{n} - Me^{-\varepsilon}\partial_t \underline{u}(t - T_l) \cdot \underline{n} \quad (2.16)$$

Chevaugeron et collab. [38] ont illustré l'implantation de la méthode dans un solveur aéroacoustique en formulation Galerkin discontinue. L'écoulement porteur a dans un premier temps été considéré nul puis non nul et glissant sur les parois, situation pour laquelle la condition de Myers-Ingard a été utilisée. Dans ce cas l'expression de la condition d'impédance en domaine temporel est plus compliquée que l'expression eq. (2.16) car elle fait apparaître une dérivée seconde de la vitesse normale portée par  $M$ . Afin de simplifier l'implantation, les auteurs ont choisi d'annuler  $M$ , ce qui ne change pas les résultats, leur étude étant faite avec une source monofréquentielle. D'un point de vue numérique, l'utilisation du modèle EHR en temporel leur a demandé le stockage de 190 à 248 valeurs (selon le choix de  $T_l$ ) par point de discrétisation se trouvant sur un liner.

### 2.2.3.2 Utilisation du modèle masse-ressort-amortisseur

Le modèle d'impédance masse-ressort-amortisseur [145], défini par eq. (2.13), s'écrit naturellement dans le domaine temporel :

$$p(t) = R\underline{u}(t) \cdot \underline{n} + M\partial_t \underline{u}(t) \cdot \underline{n} + b\hat{u}(t) \cdot \underline{n} \quad (2.17)$$

avec  $\partial_t \hat{u} = \underline{u}$ .

Cette méthode a été comparée avec le modèle EHR (combiné à la transformée en  $z$ ) par Richter et collab. [125]. Pour des calculs avec une source monofréquentielle, les deux méthodes donnent un bon accord avec des mesures effectuées par la NASA [80]. En revanche, le modèle masse-ressort-amortisseur n'est pas applicable à des problèmes large-bande, tandis que le modèle EHR a été employé avec succès sur de tels problèmes. Cela tient du fait que le terme  $\varepsilon$  permet de faire varier  $\Re(Z)$  en fonction de  $\omega$ .

### 2.2.3.3 Résolution de la propagation acoustique au sein des cavités du liner

Sbardella et collab. [138] ont proposé une méthode permettant le calcul en domaine temporel de la propagation acoustique non linéaire en conduit traité. Leur méthode se démarque des précédentes par le fait que l'idée est non pas d'imposer une condition aux limites modélisant le liner mais d'inclure les cavités du liner dans le domaine de calcul. Les dimensions transverses des cavités étant généralement très faibles, la propagation acoustique dans les cavités peut être modélisée par les équations d'Euler unidimensionnelles (dans le cas du modèle EHR, l'hypothèse d'une propagation unidimensionnelle est

---

6. La transformée de Fourier inverse étant  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$  (il est rappelé que la convention stabilité  $\exp(-i\omega t)$  a été adoptée dans ce mémoire de thèse)

aussi faite et se traduit par le terme en cotan). L'interface entre les cavités et le conduit, c'est-à-dire la plaque perforée, est modélisée par la condition :

$$\tilde{R}_t = \frac{p_d - p_l}{v_l}, \quad (2.18)$$

où  $p_d$  et  $p_l$  sont les pressions acoustiques au niveau de la plaque perforée respectivement dans le conduit et dans les cavités et  $v_l$  est la vitesse acoustique traversant la plaque perforée. Cette méthode permet donc de reproduire le modèle du résonateur de Helmholtz de résistance  $\tilde{R}_t$ .

Le modèle proposé est de plus non linéaire : la résistance de la plaque perforée  $\tilde{R}_t$  est rendue dépendante du niveau de pression acoustique via la relation :

$$\tilde{R}_t = \tilde{R}_l + \tilde{R}_n \left| \frac{v_l}{a_0} \right|, \quad (2.19)$$

où  $R_l$  et  $R_n$  sont deux constantes dépendant des caractéristiques du liner. L'écoulement étant pris uniforme au sein du conduit, la vitesse  $v_l$  est discontinue de part et d'autre de la plaque perforée.

Le modèle ainsi proposé ne dépend pas explicitement de la fréquence et peut être directement utilisé pour des calculs en domaine temporel. La validation du modèle a montré que celui était performant dans une gamme réduite de fréquence mais ne permettait pas l'étude de problèmes large-bande. Cela s'explique par le fait que l'impédance ainsi modélisée suit la loi du résonateur de Helmholtz pour laquelle  $\Re(Z)$  est constant pour tout  $\omega$ .

## 2.3 Analyse de stabilité

### 2.3.1 Lien entre acoustique et stabilité

En section 2.1.2 ont été présentées les équations d'Euler linéarisées. La décomposition de l'écoulement entre un écoulement porteur et une perturbation acoustique de faible amplitude puis la linéarisation du problème a été justifiée grâce à des considérations sur les fluctuations de pression perceptibles par l'oreille humaine.

L'analyse de stabilité linéaire d'un écoulement en mécanique des fluides suit la même démarche mais la justification est différente. Dans ce cas, l'idée est d'analyser la stabilité d'un écoulement stationnaire, appelé écoulement de base, en le perturbant légèrement. L'analyse de l'évolution (temporelle ou spatiale) de la perturbation permet alors de conclure si l'écoulement de base est stable ou non. Concrètement, on retrouve une modélisation mathématique identique à celle développée précédemment : les équations de la mécanique des fluides sont, dans un premier temps, écrites pour un écoulement  $\mathbf{Q}$  défini comme la superposition de l'écoulement de base  $\mathbf{Q}_0$  et d'une petite perturbation  $\varepsilon \mathbf{q}$  (avec  $\varepsilon \ll 1$ ) puis linéarisées dans un deuxième temps.

Les études de stabilité linéaire sont courantes en mécanique des fluides et ont de nombreuses applications comme l'étude de la transition laminaire-turbulente. Cela a donné lieu aux développements de nombreuses techniques d'analyses : stabilité locale, «biglobale» [150, 151], croissance transitoire [139]. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à l'application de ces méthodologies notamment aux instabilités hydrodynamiques pouvant être à l'origine d'une génération de bruit (voir section 2.3.3).

#### 2.3.1.1 Énergie d'une perturbation dans un écoulement porteur

Myers [103] a développé une équation de l'énergie associée à une perturbation dans un écoulement porteur stationnaire dans le cas général (c'est-à-dire à partir des équations de Navier-Stokes). Cette étude a permis d'étendre les travaux de Morfey [101] et Cantrell et Hart [36], ces derniers ayant notamment écrit une équation de l'énergie exacte pour des écoulements homentropiques et irrotationnels :

$$\begin{cases} \partial_t E_{CH} + \nabla \cdot \underline{I}_{CH} = 0 \\ E_{CH} = \frac{p^2}{2\rho_0 a_0} + \frac{\rho_0 \|\underline{u}\|^2}{2} + \rho \underline{U}_0 \cdot \underline{u} \\ \underline{I}_{CH} = (p + \rho_0 \underline{U}_0 \cdot \underline{u}) \left( \underline{u} + \frac{\rho}{\rho_0} \underline{U}_0 \right) \end{cases}$$

L'équation de l'énergie développée par Myers est obtenue non pas en combinant les équations linéarisées mais en développant l'équation de l'énergie totale sur l'écoulement  $\mathbf{Q}_0 + \varepsilon \mathbf{q} + \varepsilon^2 \mathbf{q}'$ . Il est remarquable que l'équation ainsi obtenue ne fait apparaître que des termes en  $O(\varepsilon^2)$  construits à partir des inconnues de la perturbation du premier ordre  $\mathbf{q}$ .

Sous les hypothèses émises en section 2.1.2, l'équation de l'énergie développée par Myers [103] s'écrit :

$$\partial_t E_M + \nabla \cdot \underline{I}_M = -D_M \quad (2.20)$$

avec :

$$\begin{cases} E_M &= \frac{\rho_0}{2} \left( \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + \|\underline{u}\|^2 \right) + \rho \underline{U}_0 \cdot \underline{u}, \\ \underline{I}_M &= (\rho_0 \underline{u} + \rho \underline{U}_0) \left( a_0 a_0 \frac{\rho}{\rho_0} + \underline{U}_0 \cdot \underline{u} \right), \\ D_M &= -\rho_0 \underline{U}_0 \cdot (\underline{\Psi} \wedge \underline{u}) - \rho \underline{u} \cdot (\underline{\Psi}_0 \wedge \underline{U}_0), \end{cases}$$

où  $\underline{\Psi} = \nabla \wedge \underline{u}$  et  $\underline{\Psi}_0 = \nabla \wedge \underline{U}_0$  sont les vorticités de la perturbation acoustique et de l'écoulement porteur respectivement.

Hormis dans des cas particuliers et comme le soulignent Rienstra et Hirschberg [128, section 2.7.3] cette équation de l'énergie est conservative uniquement si la vorticité est considérée comme non acoustique.

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons retenu l'énergie :

$$E = \|\underline{u}\|^2 + \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 = \underline{\varphi} \cdot \underline{\varphi}. \quad (2.21)$$

Cette définition de l'énergie, proche de celle utilisée par [42] lors de l'étude de croissances transitoires, présente l'avantage d'être simple à manipuler.

➤ Remarque :    noter qu'il est bien possible d'obtenir une équation de l'énergie conservative mais il faut utiliser une approche mixte Eulérienne/Lagrangienne. Les équations de l'acoustique sont alors les équations de Galbrun (présentées par exemple dans la référence [27]) faisant apparaître le déplacement acoustique  $\underline{\xi}$  lié à la vitesse Eulérienne par :

$$D_t \underline{\xi} = \underline{v} + \nabla \underline{U}_0 \cdot \underline{\xi}$$

où  $D_t$  est la dérivée particulaire.   lias [160] et Godin [58] ont établi dans le cas d'un écoulement porteur de pression  $p_0$  constante une équation de l'énergie conservative :

$$\partial_t E_{EG} + \nabla \cdot \underline{I}_{EG} = 0, \quad (2.22)$$

où  $E_{EG}$  et  $\underline{I}_{EG}$  sont donnés par :

$$\begin{cases} E_{EG} &= \frac{1}{2} \|\underline{D}_t \underline{x}_i\|^2 + \frac{p^2}{2} - \underline{D}_t \underline{\xi} \cdot \nabla \underline{\xi} \cdot \underline{U}_0, \\ \underline{I}_{EG} &= p \partial_t \underline{\xi} + (\partial_t \underline{\xi} \cdot \underline{D}_t \underline{\xi}) \underline{U}_0. \end{cases}$$

Brazier [27] a développé, toujours dans un formalisme mixte Eulérien/Lagrangien, une équation de l'énergie similaire à celle développée par   lias et Godin. En s'intéressant au mode de Kelvin-Helmholtz créé par une couche de mélange, Brazier a montré que l'énergie d'  lias et Godin semblait être purement acoustique tandis que cette nouvelle expression de l'énergie semble prendre en compte les contributions acoustiques et hydrodynamiques d'une onde.

## 2.3.2 L'approche modale

### 2.3.2.1 Stabilité locale

Historiquement, les premières études de stabilité ont été faites dans le cadre de la théorie de stabilité locale. Celle-ci se restreint au cas d'un écoulement dirigé selon la direction  $X$  et ne dépendant que de la direction  $Y$ , le terme «d'approximation parallèle» est utilisé. La perturbation est alors écrite sous la forme  $\underline{\varphi}(\underline{X}; t) = \underline{\varphi}(Y) e^{i(k_X X + k_Z Z - \omega t)}$  (en notant ici  $\underline{X} = (X; Y; Z)^T$ ). Généralement, l'étude de stabilité

est spatiale :  $\omega$  et  $k_Z$  sont des données du problème tandis que les valeurs possibles de  $k_X$  sont obtenues par résolution d'un problème aux valeurs propres. Un mode se propageant vers les  $X$  positifs et dont la valeur propre associée  $k_X$  est telle que  $\Im(k_X) < 0$  s'amplifiera lors de sa propagation et l'écoulement porteur sera donc dit instable.

La détermination du sens de propagation est faite grâce à la méthode de Briggs-Bers. Cette méthode a initialement été développée dans le cadre de travaux sur les plasmas [11, 30] pour définir la notion d'instabilité absolue. Une instabilité absolue, contrairement à une instabilité convective, ne s'amplifie pas en étant convectée par l'écoulement mais contamine tout le domaine. La perturbation d'un écoulement absolument instable donnera lieu à une amplification temporelle exponentielle correspondant à l'instabilité absolue la plus sévère. L'utilisation de la méthode Briggs-Bers pour la détermination du sens de propagation d'un mode ou sa caractérisation comme absolument instable est particulièrement bien expliquée dans la référence [22, annexe A].

L'étude de stabilité temporelle correspond au cas où  $k_X$  et  $k_Z$  sont fixés et  $\omega$  est recherchée comme valeur propre du problème.

L'étude de stabilité locale est un outil intéressant par son faible coût de calcul mais suppose une dépendance du problème selon une seule direction. Pour un coût de calcul relativement faible, la méthode des échelles multiples [137] ainsi que la méthode PSE [66] (pour Parabolised Stability Equations) permettent de traiter des configurations présentant une faible variation selon la direction  $X$ , configurations pour lesquelles l'écoulement est dit faiblement non parallèle.

### 2.3.2.2 Stabilité globale

Les géométries étudiées lors de ces travaux de thèse présentent des dépendances selon deux directions, invalidant ainsi l'utilisation de la stabilité locale, et nécessitant donc l'utilisation de la théorie de stabilité globale. Celle-ci se présente comme une extension de la stabilité locale pour les écoulements porteurs ayant deux, voire trois, directions non homogènes. Comme dans le cas de la stabilité locale, deux approches sont envisageables :

- L'approche spatiale, dans le cas de l'étude dans le plan transverse d'un conduit, consiste à fixer  $\omega$  et à rechercher  $k_z$  comme valeur propre de notre problème. L'approche est donc identique à celle présentée lors de l'étude de la physique de la propagation acoustique en milieu guidé section 2.1.3.
- L'approche temporelle consiste à rechercher la pulsation complexe  $\omega$  comme valeur propre de notre problème. Dans le cas de l'étude dans la section transverse d'un conduit, il est par exemple possible, mais peu courant, de fixer  $k_z$  et de voir l'équation eq. (2.8) comme un problème aux valeurs propres dont  $\omega$  est la valeur propre. Dans le cadre de cette thèse, l'approche temporelle sera utilisée sur des configurations longitudinales. Après résolution du problème aux valeurs propres eq. (2.6), l'obtention d'un mode propre tel que  $\Im(\omega) > 0$  traduira donc une instabilité temporelle.

Que ce soit dans le cas de l'approche spatiale ou de l'approche temporelle, les fonctions propres dépendent de deux directions de l'espace. Par rapport au cas de la stabilité locale, la résolution numérique sera donc bien plus coûteuse et fera souvent appel à des méthodes itératives (voir section 3.3).

La stabilité globale (temporelle ou spatiale) dans la section transverse d'un conduit peut être vue comme une simple extension de la stabilité locale où les fonctions propres passent d'unidimensionnelles à bidimensionnelles.

### 2.3.3 Amplificateur de bruit et résonateur

Huerre et Monkewitz [77] ont défini deux notions permettant de classer la dynamique d'un système fluide instable :

- Un système fluide instable peut présenter une dynamique de type résonateur dont un exemple classique est celui des instabilités de culot. Une telle dynamique est caractérisée physiquement par l'existence de perturbations auto entretenues et mathématiquement par la présence d'une région absolument instable.
- Un système peut être qualifié d'amplificateur de bruit. Dans ce cas, la dynamique d'instabilité est caractérisée par l'amplification d'un bruit extérieur due à la présence de régions convectivement instables.



L'utilisation d'un plan espace-temps  $(x, t)$  permet d'illustrer clairement les deux dynamiques. Sur les figures 2.7(a) et (b) sont représentés des exemples possibles de réponse impulsionnelle caractérisant respectivement des dynamiques de type résonateur et amplificateur de bruit. Pour un système instable ayant un comportement de type résonateur, la perturbation se développe en amont et en aval de la source et vient ainsi contaminer l'ensemble de l'écoulement. Dans le cas d'un amplificateur de bruit, le paquet d'onde instable créé par la perturbation impulsionnelle est convecté par l'écoulement.

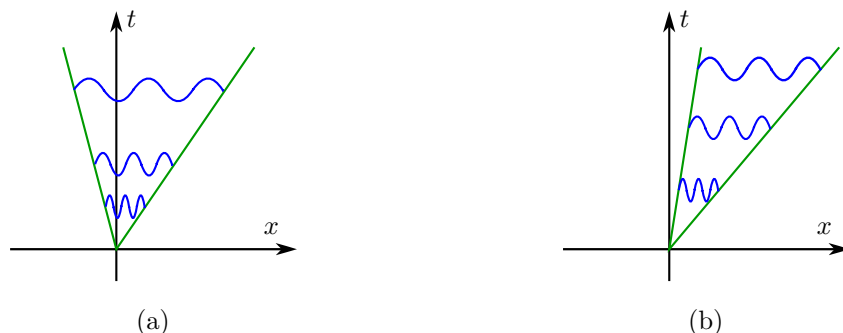


FIGURE 2.7 – Réponses impulsionnelles caractéristiques d'un système présentant une dynamique de type résonateur (a) ou amplificateur de bruit (b).

Pour revenir à notre cadre d'étude, une étude de stabilité dans une configuration transverse où  $\omega$  est fixé et  $k_z$  cherché comme valeur propre correspond donc à la recherche d'une dynamique de type amplificateur de bruit due à une instabilité convective. Le «bruit» dans ce cas étant apporté par la source de pulsation  $\omega$ . Une dynamique de type résonateur pourra aussi être étudiée au moyen de la méthode Briggs-Bers.

Dans le cas d'une configuration longitudinale où la pulsation complexe  $\omega$  est cherchée comme valeur propre de notre problème, la dynamique étudiée est de type résonateur. En effet, aucun «bruit» extérieur n'est apporté et l'obtention d'une valeur propre telle que  $\Im(\omega) > 0$  impliquera donc la présence d'une perturbation auto entretenue de pulsation  $\Re(\omega)$  et traduira donc un comportement résonateur du système fluide.

➤ Remarque : L'étude de stabilité globale se rapporte dans ce travail de thèse à l'étude de stabilité pour des écoulements dépendant d'au moins deux directions spatiales<sup>7</sup>. Le terme d'instabilité globale a aussi été défini par Huerre et Monkewitz [77] et se rapporte à des écoulements faiblement non parallèles présentant un comportement de type résonateur étudié théoriquement en étendant la notion d'instabilité absolue à des écoulements faiblement non parallèles au moyen de la méthode WKB.

Dans un cadre d'étude où les écoulements sont supposés non visqueux, les instabilités convectives de type Kelvin-Helmholtz (KH) sont fréquemment rencontrées, celles-ci étant non pas d'origine visqueuse mais liées à la présence d'une couche de mélange dans l'écoulement de base. Ces instabilités sont connues pour être, dans certains cas, génératrices de bruit. À titre d'exemples :

- Un jet en sortie de tuyère est un système fluide ayant une dynamique instable de type amplificateur de bruit due à l'existence d'instabilités convectives KH provoquées par la présence d'une ou plusieurs couches de mélange. Ce mécanisme d'instabilité est responsable d'une partie du bruit rayonné par un jet [86].
- Une cavité soumise à un écoulement présente une dynamique de type résonateur. Cette dynamique est provoquée par un mécanisme de rétroaction entre d'une part une instabilité convective KH due à la couche de mélange au-dessus de la cavité et d'autre part les modes acoustiques résonants de la cavité. Comme dans le bruit de jet, le bruit de cavité généré en champ lointain est provoqué par le rayonnement des instabilités KH de la couche de mélange [98, 158].

7. Theofilis [150, 151] a choisi d'introduire le terme de «stabilité biglobale» pour définir cette approche.

### 2.3.4 Les limites de l'approche modale

#### 2.3.4.1 Introduction

Nous nous intéressons ici à l'analyse de stabilité dans le plan longitudinal d'un conduit. Il a été montré dans la section précédente que la résolution du problème aux valeurs propres eq. (2.6) permet l'étude de la dynamique de type résonateur. Mais qu'en est-il si l'étude menée vise à caractériser la dynamique de type amplificateur de bruit ? Une des méthodes couramment employée est la recherche de la perturbation initiale optimale. Dans le cas où le système étudié présente une dynamique de type amplificateur, il n'y a pas de perturbations auto entretenues et toutes les valeurs propres du problème vérifient  $\Im(\omega) < 0$ , ce qui traduit la stabilité du problème aux temps longs :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(i\omega t) = 0$ . Une telle étude ne permet pas d'identifier une instabilité aux temps courts pourtant possible dans le cas où les équations du problème sont non normales. En effet, dans le cas où l'opérateur  $\underline{L}$  est non normal<sup>8</sup>, ses vecteurs propres ne forment pas une base orthogonale. Une amplification aux temps courts peut alors résulter de la combinaison de vecteurs propres. Ce phénomène peut être illustré simplement pour des vecteurs de dimension 2. Soient  $\underline{X}_1$  et  $\underline{X}_2$  deux vecteurs propres non orthogonaux dont la somme vaut  $\underline{X} = \underline{X}_1 + \underline{X}_2$ . Sur la figure 2.8 est représentée l'évolution des vecteurs  $\underline{X}_1$ ,  $\underline{X}_2$  et  $\underline{X}$  aux instants  $t_0$ ,  $t_1$  et  $t_2$ . Bien que les deux vecteurs soient atténués aux temps longs, le vecteur  $\underline{X}$  croît entre  $t_0$  et  $t_2$ . Ce phénomène d'amplification aux temps courts est appelé croissance transitoire.

D'autres méthodes non modales permettant la caractérisation de la dynamique de type amplificateur

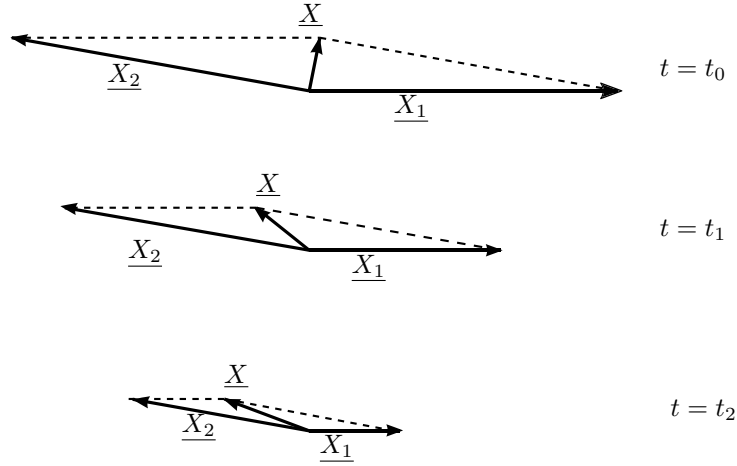


FIGURE 2.8 – Illustration du phénomène de croissance transitoire due à la non-orthogonalité de deux vecteurs propres.

de bruit d'un système sont présentées dans la référence [139]. En particulier, au lieu de s'intéresser à la réponse du système à une condition initiale, il peut être intéressant de s'intéresser à la réponse du système à un forçage harmonique. L'idée est alors de rechercher le forçage harmonique optimal maximisant l'énergie de la perturbation. Cette méthode a par exemple été utilisée par Sipp et Marquet [143] pour caractériser la dynamique de type amplificateur d'une couche limite de plaque plane.

#### 2.3.4.2 Calcul des croissances transitoires

Le principe du calcul des croissances transitoires se résume à la recherche de la perturbation initiale  $\underline{\varphi}_0 = \underline{\varphi}(t=0)$ , appelée perturbation initiale optimale, d'énergie  $E_0 = E(t=0)$  maximisant le gain d'énergie  $E(T)/E_0$  à un instant  $T$ . En définissant l'énergie  $E$  d'une perturbation  $\underline{\varphi}$  à partir de la norme dérivant d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ( $E(t) = \|\underline{\varphi}(t)\|^2 = \langle \underline{\varphi}(t); \underline{\varphi}(t) \rangle$ ), le problème s'écrit :

$$G(T) = \max_{\underline{\varphi}_0} \frac{E(T)}{E_0} = \max_{\underline{\varphi}_0} \frac{\langle \underline{\varphi}(T); \underline{\varphi}(T) \rangle}{\langle \underline{\varphi}_0; \underline{\varphi}_0 \rangle}. \quad (2.23)$$

8. il ne commute pas avec son adjoint :  $\underline{L}\underline{L}^* \neq \underline{L}^*\underline{L}$

La recherche de la perturbation initiale optimale peut se faire au moyen de trois méthodes :

❶ Une première méthode consiste à s'inspirer de l'exemple simple présenté ci-dessus et donc de chercher la perturbation initiale optimale comme une combinaison linéaire de vecteurs propres. Cette méthode a par exemple été utilisée par Ehrenstein et Gallaire [50] dans le cas de la couche limite de plaque plane. La recherche de la perturbation initiale optimale a été conduite à partir de 20 modes propres calculés en imposant en entrée et en sortie du domaine une condition de Robin associée à une transformation de type Gaster pour simuler des ondes de Tollmien-Schlichting.

❷ Cette méthode a pour défaut de se limiter à un nombre fini de modes et donc de ne pas considérer la dynamique complète de l'opérateur. Pour pallier cette limitation, l'équation (2.23) est réécrite en faisant intervenir l'opérateur d'évolution temporelle (eq. (2.4)) ainsi que la définition d'opérateur adjoint (noté avec l'exposant  $*$ ) :

$$G(T) = \max_{\underline{\varphi}_0} \frac{\langle \underline{T}(T)\underline{\varphi}_0; \underline{T}(T)\underline{\varphi}_0 \rangle}{\langle \underline{\varphi}_0; \underline{\varphi}_0 \rangle} = \max_{\underline{\varphi}_0} \frac{\langle \underline{T}^*(T)\underline{T}(T)\underline{\varphi}_0; \underline{\varphi}_0 \rangle}{\langle \underline{\varphi}_0; \underline{\varphi}_0 \rangle} . \quad (2.24)$$

Le gain maximal  $G(T)$  est ainsi égal à la valeur propre la plus grande de l'opérateur  $\underline{T}^*(T)\underline{T}(T)$ <sup>9</sup>, le vecteur propre associé étant la perturbation initiale optimale  $\underline{\varphi}_0$  qui maximise le gain. La référence [10] présente la méthode dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées et explique clairement son implantation dans un code.

❸ La recherche de la perturbation initiale optimale étant un problème d'optimisation, elle peut être conduite en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange faisant intervenir les équations adjointes. Cette méthode, dont le formalisme mathématique est clairement développé dans la référence [60], a principalement été appliquée aux équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées [43, 100]. Son application au problème considéré lors de ce travail de thèse est développée en section 8.2.

La recherche de la perturbation initiale optimale par les méthodes ❷ et ❸ étant menée en domaine temporel (entre  $t = 0$  et  $t = T$ ), le calcul non modal est basé sur l'intégration temporelle de l'équation (2.3a) (ainsi que de l'équation similaire pour le problème adjoint comme nous le verrons en détail au chapitre 8).

## Croissance transitoire et acoustique

Dans un cadre spatial, Cooper et Peake [42] ont montré l'existence de croissances transitoires dans un conduit annulaire où se propage un écoulement de base ayant une composante axiale et une composante giratoire, cette dernière étant responsable de la forte non-normalité de l'opérateur. En thermo-acoustique, des phénomènes de croissances transitoires ont aussi été observés par Balasubramanian et Sujith [8] et Wieczorek et collab. [156]. Ces derniers expliquent que dans ce cas la non-normalité de l'opérateur est due aux effets thermiques et aux conditions aux limites d'impédance. Ces études ont été menées par utilisation de la méthode ❶.

L'imposition d'une condition d'impédance  $Z$  étant source de non-normalité, la question de l'existence d'un phénomène de croissance transitoire dû à la présence d'un liner se pose. Brambley et collab. [20] se sont intéressés au cas du profil d'écoulement linéaire puis constant se propageant dans un conduit cylindrique traité acoustiquement. Ils ont montré par utilisation de fonctions de Green l'existence de décroissances spatiales non modales liées à la couche critique associée au spectre continu. Le cisaillement de l'écoulement porteur contribue de même à la non-normalité de l'opérateur, une étude menée par Félix et Pagneux [53] similaire à celle de Brambley et collab. [20] mais dans un conduit rigide a montré que des décroissances spatiales non modales pouvaient exister.

### 2.3.5 Instabilité hydrodynamique sur liner

Plusieurs études expérimentales ont mis en évidence une amplification du bruit par un liner au lieu de l'atténuation attendue. La première étude mettant en lumière cette amplification fut conduite par Meyer

---

9.  $\underline{T}^*(T)\underline{T}(T)$  est un opérateur positif, en se plaçant dans le cas discrétisé l'espace est de dimension finie et l'opérateur étant auto-adjoint donc normal, l'utilisation du théorème spectral est possible. Le problème peut aussi être vu comme la recherche de la valeur singulière la plus grande de l'opérateur  $\underline{T}(T)$ .

et collab. [99]. Les études expérimentales plus récentes peuvent être rangées dans trois cadres d'étude et sont présentées dans les sous-sections suivantes.

### 2.3.5.1 Avant-propos : écoulement porteur glissant et condition d'impédance

Historiquement, les premières études théoriques d'instabilités hydrodynamiques ont été effectuées en considérant un conduit de géométrie simple (rectangulaire ou circulaire) portant un écoulement uniforme. Mathématiquement, le problème est constitué de l'équation eq.(2.8) associée à la condition aux limites eq. (2.12). Ce problème aux valeurs propres admet des solutions analytiques et ainsi Rienstra [126] a montré l'existence de deux modes de surface supplémentaires, appelés modes de surface hydrodynamiques, pour chaque valeur de l'ordre azimutal  $m$  par rapport au cas sans écoulement. Rienstra a alors fait appel au critère Crighton-Leppington pour montrer que ces deux modes se propagent vers l'aval et a ainsi conclu qu'un des modes était instable et l'autre stable.

Brambley [22] a invalidé ces études en montrant que d'une part le critère Crighton-Leppington n'est pas correct et que de façon générale c'est le critère Briggs-Bers qui doit être utilisé. Il montre ensuite que ce dernier critère n'est pas applicable dans le cas d'un écoulement glissant associé à la condition aux limites d'impédance d'Ingard-Myers car le problème est mathématiquement mal posé : en choisissant des nombres d'ondes arbitrairement grands, la relation de dispersion donne des modes arbitrairement instables ce qui rend le critère Briggs-Bers inutilisable. Rienstra et Darau [133, 127] et Brambley [18] ont alors proposé respectivement deux nouveaux modèles d'impédance rendant le problème mathématiquement bien posé où l'idée est de prendre en compte une couche limite au-dessus du liner. Le premier modèle a été développé en négligeant la compressibilité tandis que le deuxième modèle a été établi dans le cas compressible. Gabard [54] s'est proposé de comparer ces deux modèles ainsi que la condition d'impédance d'Ingard-Myers à une solution exacte. Cette étude a permis de montrer que la modélisation de la couche limite par une surface de glissement peut s'avérer être très imprécise. De plus, il a été montré que la condition d'impédance développée par Brambley [18] se présente bien comme une amélioration de la condition d'Ingard-Myers. En revanche, le modèle proposé par Rienstra et collab. mène à une erreur assez importante du fait de l'hypothèse incompressible.

En appliquant le modèle de Brambley [18], Brambley [23, 19] montre que jusqu'à six modes de surface peuvent apparaître, un d'entre eux étant bien instable. À noter, qu'en prenant la couche limite de plus en plus mince, l'instabilité peut passer de convective à absolue [133, 127, 18].

### 2.3.5.2 Études expérimentales réalisées à l'université de Göttingen

Dans la suite des travaux précurseurs [99, 25] réalisés à l'université de Göttingen, Jüschke [81] a mené des investigations approfondies sur l'amplification du bruit en conduit par un couplage entre l'écoulement porteur et un liner. Deux configurations expérimentales ont été étudiées : dans un cas le conduit est circulaire de diamètre 50 mm tandis que dans l'autre le conduit est rectangulaire de dimension 40 mm × 30 mm. Les deux liners dans les conduits circulaire et rectangulaire sont représentés respectivement figures 2.9(a) et (b). Par rapport aux deux études précédentes, le réseau de cavités est particulier dans le sens où celui-ci est construit uniquement par une segmentation axiale et il n'y a pas de segmentation transverse (par exemple dans le cas du conduit rectangulaire les cavités sont de même largeur que le conduit) comme c'est communément le cas. De plus, contrairement aux deux configurations expérimentales qui seront présentées dans les sections suivantes, les cavités sont recouvertes d'un treillis métallique.

Dans le cas du conduit rectangulaire, le modèle d'impédance utilisé est :

$$Z(\omega) = R + i\phi \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} \left[ 1 + \frac{\delta}{B} (1 + i) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{Pr} \right) \right] \right) \quad (2.25)$$

avec  $R = 0.05$  (valeur particulièrement faible),  $\phi = 1,25$ ,  $B = 4$  mm,  $h = 107$  mm (voir figure 2.9(b)),  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  est l'épaisseur de Stokes,  $Pr = 0.713$  est le nombre de Prandtl. Le terme en  $\sqrt{\omega}$  est caractéristique d'une modélisation des pertes visco-thermiques au sein des cavités. De plus, ce terme est responsable du non-respect de la condition de causalité définie par Rienstra [131] mais peut tout de même être utilisé en domaine temporel par utilisation de dérivées fractionnaires [61].

Les expériences ainsi menées ont montré que les instabilités apparaissent pour des fréquences proches de la fréquence de résonance du liner et pour des valeurs faibles du module de l'impédance, les instabilités les plus importantes ayant été observées pour des fréquences légèrement supérieures à la fréquence de

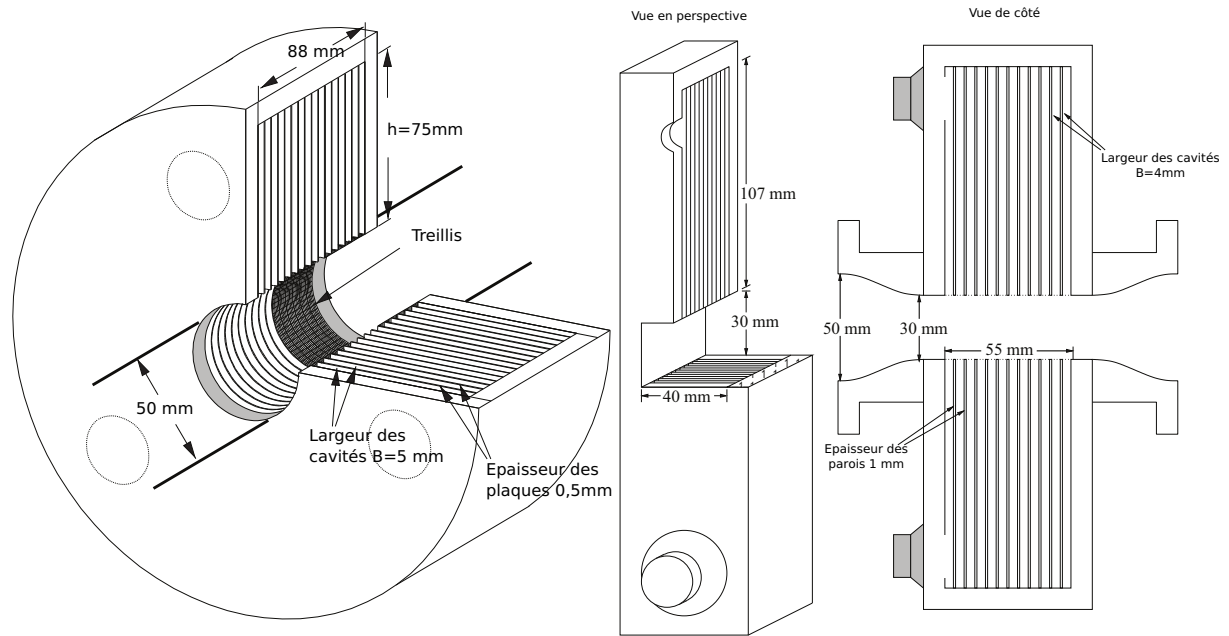


FIGURE 2.9 – Schéma des liners utilisés par Jüschke [81] dans un conduit circulaire (a) et dans un conduit rectangulaire (b) (source [81])

résonance. Cette instabilité, provoquant une émission de bruit conséquente, est accompagnée d'une forte perte de pression statique. Dans le cas du conduit circulaire, Jüschke a de plus montré que l'instabilité pouvait aussi bien être excitée par le mode plan que par le mode azimutal  $m = 1$ .

### 2.3.5.3 Mesures par Aurégan et collab. et Marx et collab.

Aurégan et Leroux [6] ont effectué des mesures de pression acoustique dans un conduit où est placé un liner. Ce dernier, de longueur  $L = 100$  mm, est constitué d'une structure céramique de cavités carrées de côté 1 mm et de hauteur  $h = 65$  mm avec 400 cavités par pouce carré, la hauteur du conduit est  $H = 15$  mm. L'impédance du liner a été mesurée expérimentalement et est relativement bien approchée dans la gamme de fréquence  $[0 ; 3000]$  Hz par l'expression suivante, similaire à eq. (2.25) :

$$Z_{VT} = i\phi \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} + (1 + i)\alpha \sqrt{\omega} \right) \quad (2.26)$$

avec  $h/a_0 = 1,85 \times 10^{-4}$ ,  $\phi = 1,25$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-3}$ .  $\phi$  est l'inverse de la porosité et le terme porté en  $\sqrt{\omega}$  modélise les pertes visco-thermiques. Une deuxième approximation, moins fidèle, est donnée par un modèle EHR simplifié :

$$Z = i\phi \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} + i \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (2.27)$$

avec  $\phi = 1,25$ ,  $h/a_0 = 2,1 \times 10^{-4}$  s et  $\varepsilon = 0,3$ . Sur les figures 2.10(a) et (b) est tracée l'impédance mesurée ainsi que l'évolution de l'impédance donnée par ces deux modèles. Les ondes acoustiques sont générées par deux haut-parleurs placés en amont et l'écoulement de base est de Mach 0,1, 0,2 ou 0,3. À Mach 0,3 et pour une fréquence proche de la fréquence de résonance du liner pour laquelle la résistance est faible ( $\approx 0,2$ ), une instabilité est observée ayant pour conséquence l'apparition d'un pic supérieur à 1 sur le coefficient de transmission du liner et une forte chute de la pression statique. En se plaçant dans les mêmes conditions expérimentales, Marx et collab. [94, 95] se sont intéressés aux caractéristiques de cette instabilité. Les mesures PIV et LDV ainsi effectuées ont permis le calcul de sa longueur d'onde, de son taux d'amplification ainsi que de sa vitesse de phase.

Marx et Aurégan [93] se sont alors intéressés au calcul de cette instabilité par analyse de stabilité linéaire locale. Les expériences menées ont permis le choix de la fréquence, du modèle d'impédance ainsi que de l'écoulement de base, ce dernier ayant été défini en approximant l'écoulement mesuré par des

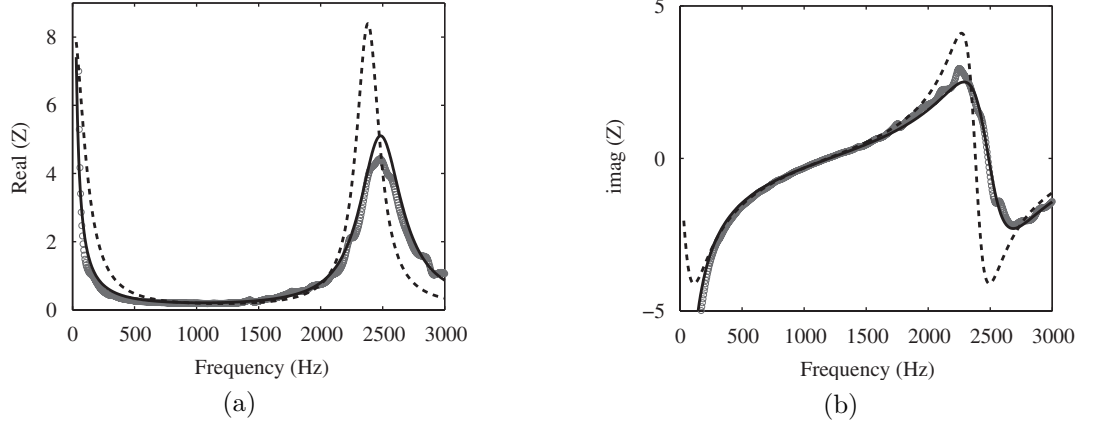


FIGURE 2.10 – Résistance (a) et réactance (b) de l'impédance mesurée (symboles) et des modèles d'impédance avec (trait continu) et sans (pointillés) pertes visco-thermiques (source [6]).

polynômes d'ordre deux. Les calculs de stabilité linéaire locale ont d'abord été effectués à l'aide des équations d'Euler linéarisées présentées précédemment. Les auteurs ont ainsi montré que l'instabilité calculée était de longueur d'onde et d'amplification comparables aux résultats des mesures. Une analyse paramétrique a montré que l'instabilité n'apparaissait que sous certaines conditions : le nombre de Mach doit être relativement élevé, la fréquence proche de celle de résonance du liner et la résistance faible. De plus, en arguant que la compressibilité n'a que peu d'effets sur le mode instable [126, 133], les auteurs se sont placés dans un cadre incompressible. De plus, du fait que les expériences aient été menées à des nombres de Reynolds élevés, les équations ont été écrites en prenant en compte la viscosité turbulente. Les résultats obtenus montrent alors un bien meilleur accord avec l'expérience.

D'autre part, deux études s'intéressant au calcul des instabilités dans cette même configuration par une approche de stabilité linéaire locale ont été publiées au cours de ce travail de thèse. La première [16] est basée sur un calcul de stabilité locale à partir des équations d'Euler linéarisées. Contrairement à l'étude précédente, l'écoulement de base mesuré est à présent approché en modifiant une expression analytique initialement proposée par [129]. L'instabilité ainsi calculée est comparable à celle mesurée. Une étude paramétrique a ensuite montré qu'à fréquence fixée, faire varier le nombre de Mach rend soit le mode hydrodynamique marginalement stable ou le dégenère en mode acoustique évanescent selon où se situe la fréquence par rapport à une valeur critique trouvée proche de la fréquence de résonance du liner. Pour un nombre de Mach fixé, augmenter la fréquence dégenère l'instabilité en un mode acoustique évanescent tandis qu'une diminution de la fréquence rendra stable le mode.

La deuxième étude publiée simultanément à ce travail de thèse [96] peut être vue comme la suite de la référence [93] présentée précédemment. À présent l'écoulement de base est choisi de façon à être plus représentatif d'un écoulement turbulent, pour cela celui-ci est obtenu par intégration de [122] :

$$\frac{dU_0^+}{d\tilde{y}} = -\frac{Re_\tau \tilde{y}}{\nu_T^+(\tilde{y})}. \quad (2.28)$$

L'exposant  $+$  correspond à une adimensionnalisation par les variables de la région turbulente interne, la vitesse de référence  $y$  étant la vitesse de frottement  $u_\tau$  et la viscosité de référence est simplement la viscosité physique ( $\nu \approx 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ). Le symbole  $\sim$  correspond à une adimensionnalisation par  $H/2$ ,  $Re_\tau = u_\tau H / (2\nu)$ , le conduit d'axe  $y = 0$  est délimité par  $y \in [-H; H]$ . La viscosité totale  $\nu_T^+(\tilde{y})$ , définie comme la somme de la viscosité physique  $\nu$  et de la viscosité turbulente, est donnée par la formule de Cess [122, 118]<sup>10</sup> :

$$\nu_T^+(\tilde{y}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{K^2 Re_\tau^2}{9} (1 - y^2)^2 (1 + 2y^2)^2 \left(1 - \exp\left(\left(|y| - 1\right) \frac{Re_\tau}{A}\right)\right)^2}. \quad (2.29)$$

Les constantes  $K = 0,42$  et  $A = 25,4$  ont été obtenues par Del Álamo et Jiménez [46] en cherchant les valeurs permettant la meilleure approximation (au sens des moindres carrés) d'un écoulement calculé nu-

10. La racine carrée semble avoir été omise par erreur par Marx et Aurégan [96].

mériquement à partir de cette expression d'écoulement dans un cas où  $Re_\tau = 2000$ . Marx et Aurégan [96] ont alors déterminé  $Re_\tau = 2760$  (soit  $u_\tau = 4,12 \text{ m.s}^{-1}$ ) de façon à ce que l'écoulement obtenu analytiquement ait le même nombre de Mach moyen  $\overline{M} = 0,27$  que le profil de vitesse mesuré. L'écoulement de base ainsi obtenu possède une sous-couche visqueuse, une zone tampon et une zone logarithmique. L'analyse de stabilité linéaire locale a été effectuée dans trois cas : compressible non visqueux, incompressible non visqueux et incompressible visqueux (en tenant compte de la viscosité turbulente). Pour les deux configurations en non visqueux, l'instabilité est de type absolue. Dans le cas visqueux, l'instabilité est bien de type convective et sa longueur d'onde et son amplification sont en meilleur accord avec l'expérience que les instabilités calculées précédemment [93, 16].

### 2.3.5.4 Banc NASA GIT

Jones et collab. [80] ont effectué des mesures de pression acoustique par microphone sur le banc GIT (pour «Grazing Impedance Tube») de la NASA Langley, une source en amont générant une onde acoustique plane. La section de la veine d'essai a pour dimension  $0,051 \text{ m} \times 0,51 \text{ m}$ . Le liner utilisé est de longueur  $L = 0,406 \text{ m}$  constitué d'une structure en céramique de cavités circulaires de diamètre  $0.6 \text{ mm}$  et de hauteur  $85,6 \text{ mm}$ . La porosité ainsi obtenue est de 57%.

En se basant sur ces données expérimentales, Burak et collab. [31] ont souhaité montrer que l'utilisation avec écoulement d'une impédance mesurée sans écoulement est valide aussi bien en domaine fréquentiel que temporel. Leurs calculs par LES compressible et résolutions des équations de Navier-Stokes linéarisées ont montré l'existence d'une instabilité lorsque la fréquence d'excitation est de  $1000 \text{ Hz}$ , valeur proche de la résonance du liner et pour laquelle la résistance du liner est faible ( $\approx 0,5$ ). Le calcul par Navier-Stokes linéarisé exhibe une instabilité uniquement dans le cas où le calcul de l'écoulement de base décrit correctement la couche limite. Ces mêmes données expérimentales avaient précédemment été utilisées par Li et collab. [88] pour valider l'extension du modèle d'impédance eq. (2.13) en domaine temporel pour des écoulements porteurs non nuls à la paroi. Ils ont alors observé à la même fréquence une instabilité hydrodynamique, les calculs étant cette fois basés sur les équations d'Euler linéarisées. Enfin dans le cadre d'un travail de thèse portant sur la détermination de l'impédance par méthode inverse [116], ce même cas d'étude a mené à l'observation d'une instabilité toujours à  $1000 \text{ Hz}$ , les équations du problème étant les équations d'Euler linéarisées où l'écoulement porteur est non glissant à la paroi.

## 2.4 Bilan

Les chapitres 4 à 8 sont dédiés aux études menées au cours de ce travail de thèse. Ces études sont effectuées soit sur des configurations longitudinales soit sur des configurations transverses. Afin de clarifier la lecture de ces chapitres, nous présentons concrètement en quoi consistent les approches modales et non modales lors de l'étude d'une configuration longitudinale ou transverse.

### Configuration longitudinale

Les configurations longitudinales étudiées dans les chapitres suivants font intervenir analyse modale et analyse non modale. Comme nous l'avons vu en section 2.3.4.2, cette dernière consiste à rechercher la perturbation à l'instant  $t = 0$  maximisant l'énergie acoustique à l'instant  $t = T$ . L'étude est menée en domaine temporel et consiste principalement, d'un point de vue numérique, à intégrer temporellement les équations directes et adjointes. La méthode est développée en détail au chapitre 8.

Concernant l'approche modale, celle-ci est exclusivement temporelle. Elle consiste à écrire la perturbation sous la forme  $\underline{\varphi}(x; y)e^{-i\omega t}$  et à écrire les équations du problème sous la forme d'un problème aux valeurs propres :

$$\underline{\underline{D}}\underline{\underline{\varphi}} = i\omega\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\varphi}}.$$

### Configuration transverse

Les études sur configurations transverses présentées dans ce travail de thèse ont été menées uniquement par analyse modale où la perturbation est mise sous la forme  $\underline{\varphi}(x; y) \exp(i(k_z z - \omega t))$ . Seules des études spatiales sont effectuées dans le cadre de cette thèse et consistent à écrire les équations du problème comme le problème aux valeurs propres :

$$\underline{\underline{D}}\underline{\underline{\varphi}} = ik_z\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\varphi}}.$$

L'analyse temporelle qui consiste à écrire les équations sous la forme

$$\underline{\underline{D}}\underline{\underline{\varphi}} = i\omega\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\varphi}},$$

n'a pas été considérée lors de ce travail de thèse. Néanmoins, celle-ci a bien été implantée dans le code EMILE afin de permettre à l'avenir l'application de la méthode Briggs-Bers par exemple.



## Sommaire

|   |           |
|---|-----------|
| <b>3.1 Présentation du solveur aéroacoustique SPACE basé sur une approximation Galerkin discontinue</b> | <b>31</b> |
| 3.1.1 Écriture des équations en formulation Galerkin discontinue  | 32        |
| 3.1.2 Propriétés générales de la méthode  | 35        |
| 3.1.3 Mise en œuvre   | 39        |
| <b>3.2 Modélisation de conditions aux limites non réfléchissantes</b>                                   | <b>41</b> |
| 3.2.1 Quelques exemples de conditions aux limites non réfléchissantes                                   | 42        |
| 3.2.2 Conditions aux limites PML (Perfectly Matched Layer)  | 43        |
| <b>3.3 Résolution d'un problème aux valeurs propres en stabilité globale modale</b>                     | <b>49</b> |
| 3.3.1 Méthode d'Arnoldi, mise en œuvre «classique»  | 49        |
| 3.3.2 Couplage de la méthode d'Arnoldi avec un solveur DNS  | 50        |
| 3.3.3 Autres méthodes   | 51        |

### 3.1 Présentation du solveur aéroacoustique SPACE basé sur une approximation Galerkin discontinue

La méthode Galerkin discontinue a été introduite par Reed et Hill [121] pour la résolution des équations de transport en neutronique. L'utilisation de la méthode Galerkin discontinue pour l'aéroacoustique, aujourd'hui courante, date de la fin des années 1990 [5, 4, 89]. Nous présentons ici les grandes lignes de la méthode et nous invitons le lecteur à consulter la référence [69] pour plus de détails théoriques et relatifs à l'implantation. De plus, nous nous restreignons à la formulation développée dans les références [47, 153]. Cette dernière est celle implantée dans la version préliminaire du solveur **SPACE** développé à l'ONERA (DSNA), qui a servi de base au code **EMILE** conçu au cours de ce travail de thèse. Ce solveur aéroacoustique permet la résolution des équations d'Euler linéarisées dans la section longitudinale d'un conduit, présentées en section 2.1.2 et rappelées ici (nous adoptons la convention de sommation d'Einstein) :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} = \underline{0} \text{ dans } \Omega ,$$

avec  $\underline{\varphi} = (u; v; a_0 \frac{\rho}{\rho_0})^T$ ,  $\underline{\underline{A}}_x = \begin{pmatrix} U_0 & 0 & a_0 \\ 0 & U_0 & 0 \\ a_0 & 0 & U_0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{\underline{A}}_y = \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0 & a_0 \\ 0 & a_0 & V_0 \end{pmatrix}$  et  $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \partial_x U_0 & \partial_y U_0 & 0 \\ \partial_x V_0 & \partial_y V_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

À une paroi est imposée la condition aux limites d'impédance, définie en section 2.2.1.1 :

$$Z \underline{u} \cdot \underline{n} = a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Le cas d'une paroi rigide est obtenu pour  $Z = \infty$ . Les conditions aux limites non réfléchissantes servant à modéliser numériquement par un domaine borné le domaine physique infini seront présentées par la suite.

### 3.1.1 Écriture des équations en formulation Galerkin discontinue

Soit  $\Omega_h$  la triangulation de  $\Omega$  par  $L$  éléments  $(D_l)_{l \in \llbracket 1; L \rrbracket}$ . Sur chaque élément  $D_l$ , la solution  $\underline{\varphi}$  est approximée sur  $P^p(D_l)$ , espace des polynômes d'ordre  $p$  sur  $D_l$ . Dans la version préliminaire du code SPACE, l'ordre des polynômes est  $p = 1$ . La solution est ensuite cherchée en écrivant une formulation variationnelle traduisant une condition d'orthogonalité (appelée aussi condition de Galerkin) par rapport à l'espace des fonctions tests sur  $D_l$  noté  $V^l$ .  $V^l$  est choisi ici comme étant  $P^p(D_l)$  et les fonctions tests composant sa base sont notées  $\underline{\psi}_m$ . L'équation variationnelle ainsi obtenue s'écrit :

$$\forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega = 0. \quad (3.1)$$

Une analogie est retrouvée par rapport aux éléments finis dans l'écriture de la formulation variationnelle, à la différence que celle-ci est à présent écrite non pas sur tout le domaine mais sur un élément. Il n'y a donc a priori pas continuité de la solution entre deux éléments. Une intégration par partie donne :

$$\forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m - \underline{\varphi} \cdot \partial_j \left( \underline{\underline{A}}_j \underline{\psi}_m \right) + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m \right) d\Omega + \int_{\partial D_l} \underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma = 0 \quad (3.2)$$

avec (convention de sommation d'Einstein et  $U_n = \underline{U}_0 \cdot \underline{n}$ ) :  $\underline{\underline{A}}_j n_j = \underline{\underline{A}}_x n_x + \underline{\underline{A}}_y n_y = \begin{pmatrix} U_n & 0 & a_0 n_x \\ 0 & U_n & a_0 n_y \\ a_0 n_x & a_0 n_y & U_n \end{pmatrix}$ .

La solution étant a priori discontinue entre deux éléments, la définition de sa valeur sur l'interface  $\partial D_l$  est ambiguë. L'idée est alors de remplacer le flux physique  $\underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi}$  par un flux numérique noté  $\underline{\underline{\Pi}}$ . Ce dernier est choisi comme une fonction de  $\underline{n}$ , vecteur normal unitaire sortant de  $D_l$ , et des traces intérieures et extérieures respectivement notées  $\underline{\varphi}^-$  et  $\underline{\varphi}^+$ , définies par<sup>1</sup> (voir figure 3.1) :

$$\underline{\varphi}^\pm(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\varphi}(x \pm \varepsilon \underline{n}). \quad (3.3)$$

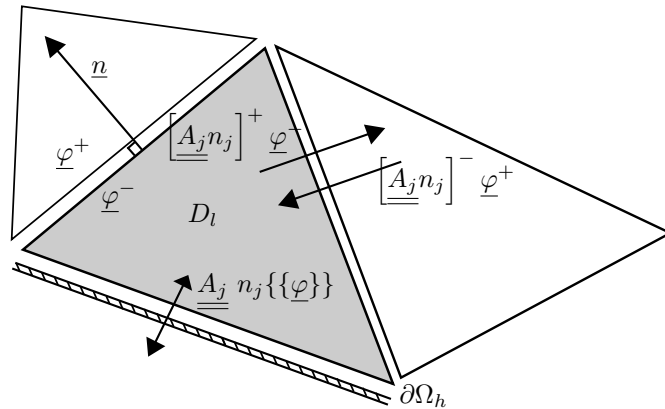


FIGURE 3.1 – Exemple de maillage pour la formulation Galerkin discontinue, représentation des traces intérieures et extérieures et des flux numériques.

Dans le cas d'une interface appartenant à la frontière physique :  $\partial D_l \in \partial \Omega_h$ , la trace extérieure est définie selon la condition aux limites imposée sur cette frontière.

L'utilisation de flux numériques permet de faire une analogie avec la méthode des volumes finis. Le choix des flux numériques dans une formulation Galerkin discontinue repose généralement sur des théories

1. Certains auteurs, à l'inverse, notent  $\underline{\varphi}^+$  la trace intérieure et  $\underline{\varphi}^-$  la trace extérieure.

précédemment développées dans le cadre de la méthode des volumes finis. Comme pour cette dernière, le choix du flux numérique  $\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n})$  est un élément central de la méthode de Galerkin discontinue :

- Il connecte les éléments  $D_l$  entre eux.
- Il impose les conditions limites.
- Il est à la base des propriétés numériques du schéma : stabilité, précision ...

La formulation Galerkin discontinue faible<sup>2</sup> est obtenue en remplaçant le flux physique  $\underline{A}_j n_j \underline{\varphi}$  par le flux numérique  $\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n})$  dans la formulation variationnelle eq. (3.2) :

$$\forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m - \underline{\varphi} \cdot \partial_j \left( \underline{A}_j \underline{\psi}_m \right) + \underline{B} \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m \right) d\Omega + \int_{\partial D_l} \underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n}) \cdot \underline{\psi}_m d\Gamma = 0. \quad (3.4)$$

En réintégrant par parties la forme faible eq. (3.4), la forme forte eq. (3.5) est obtenue.

$$\begin{aligned} \forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{A}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{B} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m d\Omega \\ + \int_{\partial D_l} \left[ \underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n}) - \underline{A}_j n_j \underline{\varphi}^- \right] \cdot \underline{\psi}_m d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'après Hesthaven et Warburton [69] les formes faible et forte sont mathématiquement équivalentes. Soit  $\mathcal{R}_m^l$  le résidu sur l'élément  $D_l$  vis-à-vis de la fonction test  $\underline{\psi}_m$ , défini par :

$$\mathcal{R}_m^l = \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{A}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{B} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m d\Omega.$$

D'après la forme forte eq. (3.5), il est clair que la valeur du résidu  $\mathcal{R}_m^l$  est une fonction des traces intérieures et extérieures :

$$\mathcal{R}_m^l = - \int_{\partial D_l} \left[ \underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n}) - \underline{A}_j n_j \underline{\varphi}^- \right] \cdot \underline{\psi}_m d\Gamma. \quad (3.6)$$

### 3.1.1.1 Définition des flux numériques

Le choix du flux numérique  $\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n})$  est présenté ici dans le cas où l'interface  $\partial D_l$  est une frontière inter-éléments ( $\partial D_l \cap \partial \Omega_h = \emptyset$ ) ou bien appartient à un bord du domaine de calcul  $\partial \Omega$  ( $\partial D_l \cap \partial \Omega_h \neq \emptyset$ ) modélisant une paroi (revêtue d'un traitement acoustique ou non). Les conditions aux limites non réfléchissantes seront traitées en section 3.2.

#### Définition du flux numérique sur une interface interne (entre deux éléments) :

La matrice  $\underline{A}_j n_j$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable :  $\underline{A}_j n_j = \underline{P} \underline{\Lambda} \underline{P}^{-1} = \underline{P} \underline{\Lambda}^+ \underline{P}^{-1} + \underline{P} \underline{\Lambda}^- \underline{P}^{-1}$ ,  $\underline{\Lambda}^+$  (respectivement  $\underline{\Lambda}^-$ ) correspondant aux valeurs propres positives (respectivement négatives). Or les valeurs propres de  $\underline{A}_j n_j$  correspondent aux vitesses de phase des caractéristiques le long de la normale  $\underline{n}$ . Ainsi en notant  $\left[ \underline{A}_j n_j \right]^\pm = \underline{P} \underline{\Lambda}^\pm \underline{P}^{-1}$ , on peut définir le flux numérique dit décentré amont («upwind» en anglais) :

$$\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n}) = \left[ \underline{A}_j n_j \right]^+ \underline{\varphi}^- + \left[ \underline{A}_j n_j \right]^- \underline{\varphi}^+. \quad (3.7)$$

Le flux ainsi obtenu permet de prendre l'information «d'où elle vient» : la caractéristique sortante est bien associée à la trace intérieure et inversement la caractéristique entrante est associée à la trace extérieure.

2. Nous adoptons dans ce manuscrit de thèse les mêmes appellations que Hesthaven et Warburton [69] : la forme faible correspond à la formulation variationnelle où les dérivées spatiales sont portées par la fonction test  $\underline{\psi}_m$  tandis que la forme forte correspond au cas où les dérivées spatiales sont portées par  $\underline{\varphi}$ .

Les matrices  $\left[ \underline{\underline{A}}_j \ n_j \right]^\pm$  s'écrivent<sup>3</sup> (avec  $U_n = \underline{U}_0 \cdot \underline{n}$ ) :

$$\left[ \underline{\underline{A}}_j \ n_j \right]^- = \min(0; U_n) \begin{pmatrix} n_y^2 & -n_x n_y & 0 \\ -n_x n_y & n_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{U_n - a_0}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & -\underline{n} \\ -\underline{n}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8a)$$

$$\left[ \underline{\underline{A}}_j \ n_j \right]^+ = \max(0; U_n) \begin{pmatrix} n_y^2 & -n_x n_y & 0 \\ -n_x n_y & n_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{U_n + a_0}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & \underline{n} \\ \underline{n}^T & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8b)$$

Finalement le terme de flux dans la discrétisation Galerkin discontinue eq. (3.5) s'écrit :

$$\underline{\Pi}(\varphi^-; \varphi^+; \underline{n}) - \underline{\underline{A}}_j \ n_j \varphi^- = \left[ \underline{\underline{A}}_j \ n_j \right]^- [[\varphi]],$$

avec  $[[\varphi]] = \varphi^+ - \varphi^-$ .

➤ **Remarque** : Le flux ainsi défini est :

- constant :  $\underline{\Pi}(\varphi; \varphi; \underline{n}) = \underline{\underline{A}}_j n_j \varphi$
- conservatif :  $\underline{\Pi}(\varphi^0; \varphi^1; \underline{n}) = -\underline{\Pi}(\varphi^0, \varphi^1, -\underline{n})$

#### Flux sur une interface externe de type paroi :

Soit une interface  $D_l$  appartenant à un bord du domaine de calcul  $\partial\Omega$  ( $\partial D_l \cap \partial\Omega_h \neq \emptyset$ ) modélisant une paroi. Au niveau de celle-ci est imposée une condition aux limites d'impédance eq. (2.11).

L'idée est de choisir un flux numérique de type centré :  $\underline{\Pi}(\varphi^-; \varphi^+; \underline{n}) = \underline{\underline{A}}_j n_j \{ \{ \varphi \} \}$  où  $\{ \{ \varphi \} \} = (\varphi^- + \varphi^+)/2$  est la moyenne entre la trace intérieure et la trace extérieure. Cette dernière est ici artificielle et est définie à partir de la condition aux limites à imposer :  $\underline{u}^+ \cdot \underline{n} = \frac{1}{Z} a_0 \frac{\rho^-}{\rho_0}$  et  $a_0 \frac{\rho^+}{\rho_0} = Z \underline{u}^- \cdot \underline{n}$ . Et ainsi, le terme de flux dans la formulation Galerkin discontinue eq. (3.5) s'écrit :

$$\underline{\Pi}(\varphi^-; \varphi^+; \underline{n}) - \underline{\underline{A}}_j \ n_j \varphi^- = \underline{\underline{M}}(Z) \varphi^- = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} Z \underline{n} \otimes \underline{n} & -\underline{n} \\ -\underline{n}^T & \frac{1}{Z} \end{pmatrix} \varphi^- = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} Z n_x^2 & Z n_x n_y & -n_x \\ Z n_x n_y & Z n_y^2 & -n_y \\ -n_x & -n_y & 1/Z \end{pmatrix} \varphi^-.$$

Afin d'éviter des comportements singuliers lorsque  $Z = 0$  ou  $Z \rightarrow \infty$ , la condition aux limites d'impédance est écrite au moyen du coefficient de réflexion acoustique défini par  $\beta = (Z - 1)/(Z + 1)$  :

$$(\beta - 1) a_0 \frac{\rho}{\rho_0} + (\beta + 1) \underline{u} \cdot \underline{n} = 0. \quad (3.9)$$

En reprenant alors un flux de type centré et en choisissant la trace extérieure  $\varphi^+$  telle que  $a_0 \frac{\rho^+}{\rho_0} = \beta a_0 \frac{\rho^-}{\rho_0} + (\beta + 1) \underline{u}^- \cdot \underline{n}$  et  $\underline{u}^+ \cdot \underline{n} = (1 - \beta) a_0 \frac{\rho^-}{\rho_0} - \beta \underline{u}^- \cdot \underline{n}$ , le terme de flux dans eq. (3.5) s'écrit :

$$\underline{\underline{M}}(\beta) = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} (\beta + 1) \underline{n} \otimes \underline{n} & (\beta - 1) \underline{n} \\ -(1 + \beta) \underline{n}^T & (1 - \beta) \end{pmatrix} = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} (\beta + 1) n_x^2 & (\beta + 1) n_x n_y & (\beta - 1) n_x \\ (\beta + 1) n_x n_y & (\beta + 1) n_y^2 & (\beta - 1) n_y \\ -(1 + \beta) n_x & -(1 + \beta) n_y & (1 - \beta) \end{pmatrix}.$$

Notons que le produit  $\underline{\underline{M}}(\beta) \varphi^-$  se développe en :

$$\underline{\underline{M}}(\beta) \varphi^- = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} n_x & n_y & - \\ \left[ (\beta + 1) \underline{u} \cdot \underline{n} + (\beta - 1) a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] & \left[ (\beta + 1) \underline{u} \cdot \underline{n} + (\beta - 1) a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] & \left[ (\beta + 1) \underline{u} \cdot \underline{n} + (\beta - 1) a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \end{pmatrix},$$

---

3.  $\begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & -\underline{n} \\ -\underline{n}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & -n_x \\ n_x n_y & n_y^2 & -n_y \\ -n_x & -n_y & 1 \end{pmatrix}$

et est donc nul si  $\underline{\varphi}^-$  satisfait la condition d'impédance (ce qui est cohérent avec eq. (3.6)).

➤ Remarques :

Le cas d'une paroi rigide correspond à  $\beta = 1$ . De plus, comme expliqué par Atkins [4], la condition aux limites de paroi rigide correspond à une condition d'antisymétrie sur la vitesse («nœud» de vitesse) par rapport à la paroi et à une condition de symétrie sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  («ventre» de pression). En effet, en prenant  $\underline{\varphi}^+$  tel que  $\underline{u}^+ \cdot \underline{n} = -\underline{u}^- \cdot \underline{n}$  et  $a_0 \frac{\rho^+}{\rho_0} = a_0 \frac{\rho^-}{\rho_0}$ , l'égalité suivante est obtenue<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\underline{A}}_j \ n_j \right]^- (\underline{\varphi}^+ - \underline{\varphi}^-) &= a_0 \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ -\underline{n}^T & 0 \end{pmatrix} \underline{\varphi}^- = a_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & 0 \\ n_x n_y & n_y^2 & 0 \\ -n_x & -n_y & 0 \end{pmatrix} \underline{\varphi}^- \\ &= \underline{\underline{M}}(\beta = 1) \underline{\varphi}^- . \end{aligned}$$

De même, dans le cas d'une paroi «molle»  $\beta = -1$ , la condition limite correspond à une condition de symétrie sur la vitesse par rapport à la paroi et à une condition d'antisymétrie sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ . En effet, en prenant  $\underline{\varphi}^+$  tel que  $u_n^+ = u_n^-$  et  $a_0 \frac{\rho^+}{\rho_0} = -a_0 \frac{\rho^-}{\rho_0}$ , l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\underline{A}}_j \ n_j \right]^- (\underline{\varphi}^+ - \underline{\varphi}^-) &= a_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n_x \\ 0 & 0 & -n_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\varphi}^- \\ &= \underline{\underline{M}}(\beta = -1) \underline{\varphi}^- . \end{aligned}$$

### 3.1.1.2 Formulation Galerkin discontinue

En remplaçant finalement les flux numériques par leur expression dans eq. (3.5), la formulation forte devient (voir figure 3.1) :

$$\begin{aligned} \forall l \in [1, L], \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} \left[ \underline{\underline{A}}_j \ n_j \right]^- [[\underline{\varphi}]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}}(\beta) \underline{\varphi}^- \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma = 0 . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comme le remarque Cockburn [41], d'après la formulation forte eq. (3.10), le résidu sur chaque maille dépend directement du saut inter-éléments  $[[\underline{\varphi}]]$ . Plus précisément, le résidu dépend ici de  $\left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- [[\underline{\varphi}]]$  qui vaut :

$$\left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- [[\underline{\varphi}]] = \min(0; U_n) \begin{pmatrix} n_y (n_y [[u]] - n_x [[v]]) \\ n_x (-n_y [[u]] + n_x [[v]]) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{U_n - a_0}{2} \begin{pmatrix} n_x [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_x \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ n_y [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_y \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ - [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] + \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Propriétés générales de la méthode

La méthode Galerkin discontinue possède de nombreuses propriétés qui ont poussé l'Onera à faire le choix d'une telle discrétisation pour le solveur aéroacoustique **SPACE** [115].

Elle présente des avantages par rapport à la méthode des éléments finis, cette dernière présentant des problèmes de stabilité lors de son application à des problèmes d'ondes et demandant certaines corrections pour traiter de tels problèmes [115]. Par rapport à une discrétisation type différences finies, la méthode Galerkin discontinue offre l'avantage majeur d'être compatible avec l'utilisation de maillages non structurés. Cela permet d'une part l'utilisation de mailleurs automatiques et d'autre part le calcul sur des

---

4. À la paroi  $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$

géométries complexes. Il est ainsi possible de facilement choisir un faible pas de maillage dans certaines régions du domaine de calcul et à l'inverse de relâcher le maillage dans d'autres (adaptation  $h$ ). En outre, la méthode Galerkin discontinue offre la possibilité de changer localement l'ordre d'approximation (adaptation  $p$ ).

La méthode Galerkin discontinue, par son caractère local et l'utilisation de flux numériques, offre une grande flexibilité et permet la résolution de problèmes multiphysiques. De plus, le caractère local permet par exemple de définir un pas de temps local lors d'une intégration en temps par une méthode Runge-Kutta.

La méthode Galerkin discontinue est attrayante pour sa très faible erreur dispersive, l'erreur dissipative étant elle aussi faible hormis aux bas ordres. De plus, la formulation Galerkin discontinue permet de rendre commutatives les opérations de discrétisation et de construction de l'adjoint. Ces deux points sont traités dans les sections suivantes.

### 3.1.2.1 Propriétés dispersives et dissipatives de la méthode

Nous nous intéressons dans cette section à l'évaluation des propriétés dispersives et dissipatives du schéma Galerkin discontinu. Pour cela, nous reprenons une étude unidimensionnelle classique proposée dans les références [69, chapitre 4] et [76].

Soit l'équation unidimensionnelle d'advection suivante :

$$\partial_t f + a_0 \partial_x f = 0 \quad (3.12)$$

avec pour condition initiale  $f(x,0) = e^{ikx}$  où  $k$  est le nombre d'onde. La solution analytique  $f(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$ , où  $\omega$  et  $k$  sont liés par la relation de dispersion  $\omega = a_0 k$ , est obtenue par séparation des variables.

La résolution se fait numériquement avec le schéma Galerkin discontinu : la solution  $f^l$  sur l'élément  $l$  est cherchée comme satisfaisant une condition de Galerkin sur l'équation eq. (3.12) pour chaque fonction test  $\psi_m$  sur l'intervalle  $D_l = [x_g^l; x_d^l]$  de taille  $h$  :

$$\forall m \int_{x_g^l}^{x_d^l} (\partial_t f^l + a_0 \partial_x f^l) \psi_m dx = [((a_0 f^l) - (a_0 f^l)^*) \psi_m]_{x_g^l}^{x_d^l} . \quad (3.13)$$

Le flux numérique usuel [69, chapitre 1]

$$(a_0 f)^* = \{\{a_0 f\}\} + |a_0| \llbracket f \rrbracket (1 - \alpha)/2$$

est choisi, où  $\llbracket f \rrbracket = n^- f^- + n^+ f^+$  avec  $n$  la normale (à gauche  $n^-(x_g^l) = -n^+(x_g^l) = -1$  et à droite  $n^-(x_d^l) = -n^+(x_d^l) = 1$ ). Le coefficient  $\alpha \in [0; 1]$  est tel que  $\alpha = 1$  correspond au flux centré et  $\alpha = 0$ , valeur choisie ici, correspond au flux décentré amont qui est l'équivalent 1D du flux choisi pour la résolution des équations d'Euler linéarisées dans **SPACE**. L'équation eq. (3.13) s'écrit alors :

$$\int_{x_g^l}^{x_d^l} (\partial_t f^l + a_0 \partial_x f^l) \psi_m dx = -\psi_m(x_g^l) (a_0 f^l(x_g^l) - a_0 f^{l-1}(x_d^{l-1})) . \quad (3.14)$$

La solution étant de la forme  $e^{ikx}$ ,  $f^{l-1}(x_d^{l-1}) = f^l(x_d^l) e^{-ikh}$  et la résolution se fait uniquement sur l'élément  $l$ . L'équation eq. (3.14) se simplifie alors en :

$$\int_{x_g^l}^{x_d^l} (\partial_t f^l + a_0 \partial_x f^l) \psi_m dx = -\psi_m(x_g^l) (a_0 f^l(x_g^l) - a_0 f^l(x_d^l) e^{-ikh}) . \quad (3.15)$$

La discrétisation avec des polynômes d'ordre  $N_p$  se fait en prenant  $N = N_p + 1$  points sur l'élément  $l$  :

$$f^l(x,t) = \sum_{j=1}^N f_j(t) l_j(x) ,$$

où  $l_j(x)$  est le polynôme de Lagrange au point  $j$ .

Finalement, en prenant  $\partial_t = -i\omega$ , le problème se ramène au problème aux valeurs propres discrétisé<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{f}}^l &= i\omega \underline{\underline{B}} \underline{\underline{f}}^l, \\ \text{où : } \begin{cases} \underline{\underline{A}} = a_0 \underline{\underline{S}} + a_0 \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 - a_0 e^{-ikh} \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_N, \\ (\underline{\underline{S}})_{ij} = \int_{x_g^l}^{x_d^l} \frac{dl_j}{dx} \psi_i dx, \\ (\underline{\underline{B}})_{ij} = \int_{x_g^l}^{x_d^l} l_j \psi_i dx. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce problème aux valeurs propres est résolu en changeant le nombre de points par longueurs d'onde  $p_\lambda = N\lambda/h = 2\pi N/(kh)$ . Pour cela, la résolution est faite en faisant varier  $k$  pour différents ordres de discrétisation  $N_p$ .  $p_\lambda$  est pris entre  $p_\lambda = 2$  (résolution minimale) et  $p_\lambda = \infty$  (résolution maximale), cela revient à faire varier  $\bar{k} = K/(N\pi) = 2/p_\lambda$  (avec  $K = kh$ ) entre 1 et 0. Le problème est alors mis sous forme non dimensionnée ( $\bar{\Omega} = \omega h/a_0$ ) et la résolution de dispersion devient alors  $\bar{\Omega} = \bar{k}$  avec  $\bar{\Omega} = \Omega/(N\pi)$ .

Sur les figures 3.2(a)(b) sont tracées les courbes  $\Re(\bar{\Omega}) = g(\bar{k})$  (traduisant le caractère dispersif du schéma) et  $\Im(\bar{\Omega}) = g(\bar{k})$  (traduisant le caractère dissipatif du schéma) pour différents ordres  $N_p = N - 1$ . À titre de comparaison  $\Re(\bar{\Omega}) = g(\bar{k} = k/\pi)$  est tracé pour le schéma aux différences finies DRP d'ordre 4 [148].  $\bar{\Omega}$  est donné par [148, eq. (2.5)] :

$$\bar{\Omega} = -i \sum_{j=-M}^M a_j e^{ijk}$$

où  $a_j$  sont les coefficients du schéma DRP. À noter que  $\bar{\Omega}$  est alors réel pur. Comme attendu, un bon comportement des schémas Galerkin discontinus pour les faibles nombres d'onde est trouvé ainsi qu'une amélioration des performances avec l'augmentation en ordre.

Une onde est considérée comme étant calculée avec précision si l'erreur sur la dispersion et la dissipation est inférieure ou égale à 1%. Le critère dispersif correspond directement à l'erreur sur la vitesse de phase tandis que le critère dissipatif correspond à un amortissement de moins de 10% de l'amplitude de l'onde lors d'une propagation sur dix éléments [76]. Le nombre de points par longueur d'onde permettant de satisfaire ces deux critères est donné dans le tableau 3.1. Il est observé que le critère sur la dissipation est plus dur à satisfaire, surtout pour les faibles ordres. Pour le schéma DRP d'ordre 4, le critère dispersif est satisfait pour  $\lambda/h > 4,26$ .

De plus, il est observé sur la figure 3.2(a) que comme pour un schéma aux différences finies la vitesse de groupe devient négative pour les valeurs élevées de  $\bar{k}$ . En outre, le schéma Galerkin discontinu se distingue d'un schéma aux différences finies par l'existence d'une plage de nombre d'onde  $\bar{k}$  sur laquelle la vitesse de phase est plus élevée que la vitesse de phase physique.

TABLE 3.1 – Nombre de points par longueur d'onde nécessaire pour respecter les critères  $|\Re(\bar{\Omega}) - K| < 1\%$  et  $|\Im(\bar{\Omega})| < 1\%$

| Ordre | $\min p_\lambda \quad  \Re(\bar{\Omega}) - K  < 1\%$ | $\min p_\lambda \quad  \Im(\bar{\Omega})  < 1\%$ |
|-------|--|--|
| 1     | 10,0   | 14,29  |
| 2     | 7,69   | 9,09   |
| 3     | 6,67   | 7,14   |
| 4     | 6,06   | 6,25   |
| 5     | 5,56   | 5,71   |

En plus d'étudier le cas de l'équation d'advection unidimensionnelle, Hu et collab. [76] se proposent de considérer l'équation d'onde bidimensionnelle avec des mailles triangulaires ou quadrilatérales. Il est alors montré que l'orientation des éléments induit une anisotropie de dispersion et de dissipation, cette dernière étant plus marquée. Il a aussi été montré que l'utilisation d'un maillage non structuré induit une anisotropie moins prononcée que l'utilisation d'un maillage structuré avec des mailles d'orientations alternées. Ce dernier type de maillage induisant lui-même moins d'anisotropie qu'un maillage structuré

5.  $\psi_m(x_g^l) = \delta_{m1}$ ,  $f^l(x_g^l) = f_1$  et  $f^l(x_d^l) = f_N$ .

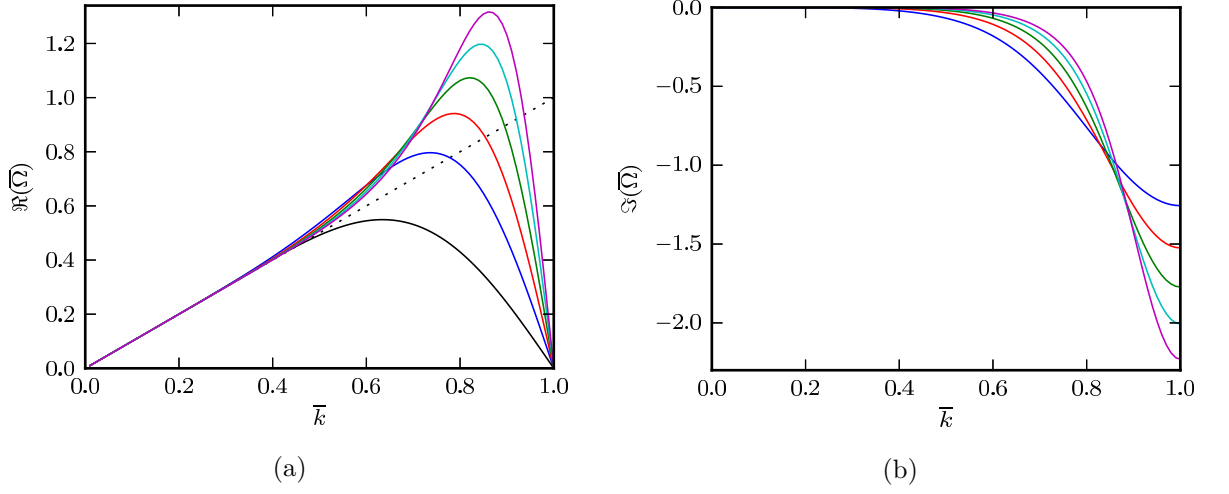


FIGURE 3.2 – Approximation de la relation de dispersion pour différents ordres

*Courbe pointillée : Relation de dispersion exacte ; Ordre 1 ; Ordre 2 ; Ordre 3 ; Ordre 4 ; Ordre 5 ; Trait continu noir : schéma DRP d'ordre 4.*

où les mailles sont uniformément orientées.

➤ **Remarque :** En plus de s'intéresser au flux décentré amont, Hu et collab. [76] ainsi que Hesthaven et Warburton [69] se sont intéressés au cas du flux centré. Il apparaît que celui-ci est non dissipatif, même pour les modes parasites. En outre, Hesthaven et Warburton [69] ont remarqué que pour  $N = 2$ , les résultats sont proches de ceux obtenus avec le flux décentré amont alors que pour  $N_p = 2$ , il apparaît que le schéma se comporte mal pour  $\bar{k} > 0,25$ .

### 3.1.2.2 Discrétisé de l'adjoint et adjoint du discrétisé

Lorsqu'une étude numérique nécessite l'utilisation de l'opérateur adjoint, celui-ci peut être obtenu de deux façons. La première solution consiste à écrire les équations adjointes des équations directes continues du problème puis à les discrétiser. La deuxième solution consiste à construire l'opérateur adjoint à partir de la discrétisation de l'opérateur direct. Les étapes de discrétisation et de construction de l'adjoint ne commutent généralement pas, un choix doit être fait sur la stratégie adoptée. D'une part, la discrétisation des équations adjointes continues n'offre pas la même précision et donne lieu à un problème moins bien posé [143]. D'autre part, la construction de l'adjoint à partir de la discrétisation de l'opérateur direct continu peut provoquer l'apparition de modes non physiques rendant les résultats faussés [144].

L'utilisation de la méthode Galerkin discontinue présente l'avantage, sous certaines conditions, de rendre les étapes de discrétisation et de construction de l'adjoint commutatives. Hartmann [64] montre ainsi que la discrétisation de nombreux problèmes par un schéma Galerkin discontinue permet d'accéder à cette propriété. Ventribout [153] a montré que pour le schéma Galerkin discontinue eq. (3.10) présenté en section 3.1.1, l'adjoint du problème discrétisé est bien identique au discrétisé du problème adjoint continu. La démonstration sera reprise et étendue dans le chapitre 6. Cette propriété sera traduite par «consistance de l'adjoint» par la suite.

### 3.1.2.3 Structure des matrices obtenues par une discrétisation Galerkin discontinue

Dans le jargon de la méthode des éléments finis, la matrice portant le terme  $\partial_t \varphi$  dans la formulation eq. (3.10) est appelée matrice de masse. Étant donné qu'elle ne fait intervenir qu'un terme d'intégrale sur l'élément courant, cette matrice est diagonale par blocs et donc aisément inversible. Pour des problèmes temporels, cette propriété facilite grandement l'utilisation de méthodes explicites d'intégration en temps, ces dernières pouvant aussi bénéficier du fait qu'il est possible de définir un pas de temps local sur chaque



triangle. Enfin, lors d'une étude de stabilité linéaire modale, il est ainsi aisé d'écrire le problème aux valeurs propres généralisées comme un problème aux valeurs propres standard.

La matrice formée par les autres termes est constituée d'une diagonale de blocs provenant du terme d'intégration sur la maille courante  $D_l$  et du terme d'intégration sur  $\partial D_l$  de la trace intérieure ainsi que de blocs non diagonaux provenant de l'intégration sur  $\partial D_l$  de la trace extérieure.

Par rapport à la méthode des éléments finis, l'inconvénient majeur de la méthode Galerkin discontinue est la forte augmentation du nombre de points de calculs résultant de la «séparation» des éléments. En effet, les points aux interfaces entre deux éléments sont comptés deux fois. L'utilisation de polynômes d'ordre élevé permet d'atténuer cet effet du fait de l'apparition d'un nombre croissant de points de contrôle à l'intérieur des triangles. D'autre part, la méthode est particulièrement adaptée au calcul massivement parallèle. Le caractère local de la méthode rend possible le calcul massivement parallèle sur des processeurs graphiques GPU. A titre d'exemple, Klöckner et collab. [83] montrent que l'utilisation du calcul parallèle GPU permet un gain de temps considérable par rapport à un calcul séquentiel et cela en utilisant un ordinateur GPU d'une valeur de 400\$.

➤ Remarque : La structure bloc des matrices résultants de la discrétisation Galerkin discontinue permet notamment de créer simplement un préconditionneur ILU(0) comme le montre Persson P. et J. [114].

### 3.1.3 Mise en œuvre

#### Premiers éléments et outils mathématiques :

Nous présentons ici l'implantation de la méthode Galerkin discontinue pour des polynômes d'ordre  $N_p$ . Il est rappelé que la version préliminaire de code **SPACE** sur laquelle repose le code **EMILE** développé lors de cette thèse est basée sur une approximation d'ordre  $N_p = 1$ .

La méthode Galerkin discontinue est ici nodale : sur l'élément  $D_l$ , les polynômes sont les polynômes d'interpolation de Lagrange  $L_i^l(x, y)$  associés aux points de contrôle  $(x_i^l; y_i^l)$  :  $L_i^l(x_j^l, y_j^l) = \delta_{ij}$ . Dans le cas d'une approximation d'ordre 1, les points de contrôle sont simplement les sommets du triangle. De façon générale, une approximation d'ordre  $N_p$  implique l'utilisation de  $N = (N_p + 1)(N_p + 2)/2$  points de contrôle par éléments. La position des différents points de contrôle est donnée par un processus d'optimisation, permettant entre autres d'éviter des phénomènes de Runge [69, section 3.1].

Nous nous plaçons dans le cas général où le vecteur  $\underline{\varphi}$  contient  $n_v$  inconnues, l'approximation de  $\underline{\varphi}$  sur  $D_l$  s'écrit :

$$\underline{\varphi}(x, y) \Big|_{D_l} = \sum_{i=1}^N \varphi_i^l L_i^l(x, y) . \quad (3.17)$$

$\varphi_i^l$  correspond à la valeur du vecteur des  $n_v$  inconnues au point  $i$  du triangle  $l$ .

➤ Remarque : Le vecteur global d'inconnues contenant pour chaque point  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$  de chaque triangle  $l \in \llbracket 1; L \rrbracket$  le vecteur  $\varphi_i^l$  est noté  $\underline{\varphi}$ . Ce vecteur global a pour dimension  $L \times N \times n_v$ . Les matrices globales seront de même notées en gras. À titre d'exemple nous noterons  $\underline{\underline{M}}$  la matrice globale, appelée matrice de masse, obtenue par la correspondance :

$$\underline{\underline{M}} \underline{\varphi} \longleftrightarrow \forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega.$$

Comme cela est généralement fait dans la méthode des éléments finis [159], l'intégration sur un triangle  $D_l$  se fait en se ramenant à un triangle de référence, voir figure 3.3. Les coordonnées des sommets du triangle sont données dans le tableau 3.2 pour  $N_p = 1$ . La transformation  $F$  est obtenue en raisonnant sur les coordonnées barycentriques :

$$\begin{cases} \underline{x} = F(\underline{u}) = \begin{pmatrix} (1-u-v)x_1 + ux_2 + vx_3 \\ (1-u-v)y_1 + uy_2 + vy_3 \end{pmatrix} \\ \underline{u} = F^{-1}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} (x-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y-y_1) \\ (x_2-x_1)(y-y_1) - (x-x_1)(y_2-y_1) \end{pmatrix} J_F^{-1} \end{cases} \quad (3.18)$$

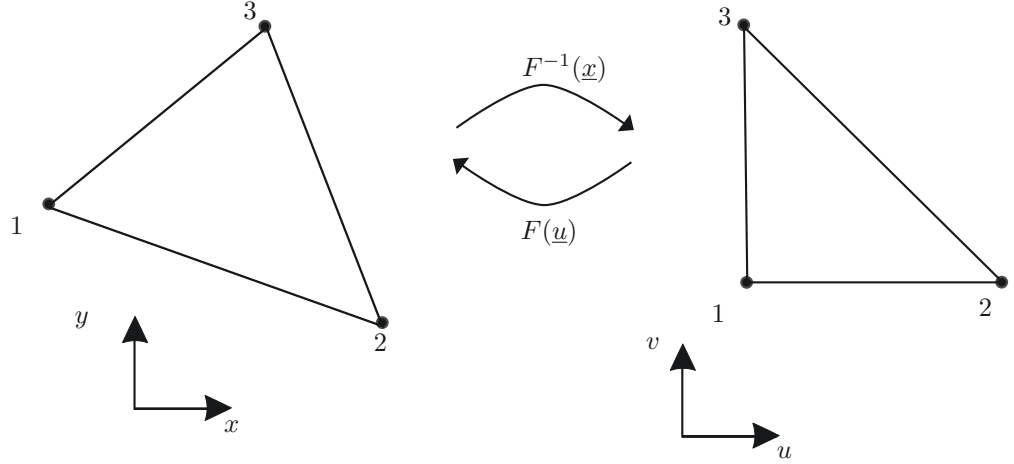

 FIGURE 3.3 – Transformation du triangle courant  $D_l$  vers le triangle de référence  $D$ 

 TABLE 3.2 – Coordonnées des points de discrétisation dans le repère lié au triangle de référence  $D$  et expressions des polynômes de Lagrange associés à chacun de ces points de contrôle pour  $N_p = 1$ .

| Point | Coordonnées : $(u; v)$ | Polynôme de Lagrange $l_i(u; v)$ |
|-------|------------------------|----------------------------------|
| 1     | $(0; 0)$               | $1 - u - v$                      |
| 2     | $(1; 0)$               | $u$                              |
| 3     | $(0; 1)$               | $v$                              |

où  $J_F^k = [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$  est le Jacobien, défini comme étant le déterminant de la matrice Jacobienne de la transformation notée  $\mathcal{J}_F$  :

$$\mathcal{J}_F(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Pour calculer une intégrale sur  $D_l$  d'une fonction quelconque  $G(x, y)$  on utilise :

$$\int \int_{D_l} G(x, y) dx dy = \int \int_D G(F(u, v)) |J_F^l| du dv.$$

Les polynômes de Lagrange  $l_i$  sont exprimés sur  $D$  :  $L_i(x, y) = l_i(u, v)$  et sont donnés tableau 3.2 pour  $N_p = 1$ . Le calcul des intégrales sur le triangle de référence est effectué numériquement par quadratures :

$$\int \int_D G(u, v) du dv = \sum_{o=1}^O p_o G(u_o, v_o).$$

$(u_o, v_o)$   $o \in \llbracket 1, O \rrbracket$  sont les  $O$  points de quadrature pondérés par les poids  $p_o$ .  $O, u_o, v_o$  et  $p_o$  sont données par les formules de quadrature de Hammer [44]. L'intégrale relative à la matrice de masse demande trois points de quadrature tandis que l'intégrale relative à la matrice de rigidité en demande quatre.

La démarche est identique pour calculer les intégrales sur les éléments unidimensionnels  $\partial D_l$ . Chaque arête, par exemple  $[x_1; x_2]$  est transformée en le segment de référence  $u = [-1; 1]$  via la transformation :

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{u+1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Pour  $p = 1$ , les deux points de contrôle sont  $u = -1$  et  $u = 1$  respectivement associés aux polynômes de Lagrange  $(1-u)/2$  et  $(1+u)/2$ . Les points de quadrature et leurs poids sur les éléments unidimensionnels sont simplement donnés par les formules de Gauss-Legendre.

### Création d'une matrice locale :

Considérons le cas général d'un vecteur d'état  $\underline{\varphi}$  à  $n_V$  variables et une discrétisation à  $N$  points par triangle. Nous montrons ici comment sont construites les matrices locales à partir des termes d'intégration de la formulation Galerkin discontinue eq. (3.10).

○ Cas 1 : Nous montrons ici comment s'exprime une matrice locale  $\underline{\underline{M}}$  telle que  $\underline{\underline{M}} (\underline{\varphi}_1^l; \dots; \underline{\varphi}_N^l)^T$  corresponde à l'expression :

$$\forall \psi_m \int \int_{D_l} \underline{\underline{N}} \underline{\varphi} \psi_m dx dy,$$

où  $\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{N}}(x; y)$  est une donnée du problème. Les fonctions tests sont écrites comme des fonctions scalaires<sup>6</sup>,  $\psi_m(x, y) = L_m(x, y)$  avec  $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Comme la solution  $\underline{\varphi}$ , la matrice  $\underline{\underline{N}}$  est approximée par :

$$\underline{\underline{N}} = \sum_{i=1}^p \underline{\underline{N}}_i L_i^l(x, y).$$

La matrice locale  $\underline{\underline{M}}$  est constituée de  $N \times N$  blocs de  $n_V \times n_V$  éléments. L'expression de la condition de Galerkin par rapport à la fonction test  $m$  donne la ligne de bloc  $m$ , c'est-à-dire les lignes  $(m-1)n_V + 1$  à  $m n_V$  :

$$\begin{aligned} \int \int_{D_l} \underline{\underline{N}} \underline{\varphi} \psi_m dx dy &= \int \int_{D_l} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{N}}_i L_i^l(x, y) \sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_j^l L_j^l(x, y) L_m^l(x, y) dx dy \\ &= |J_F^l| \int \int_D \sum_{i=1}^N \underline{\underline{N}}_i l_i(u, v) \sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_j^l l_j(u, v) l_m(u, v) du dv \\ &= |J_F^l| \sum_{o=1}^O p_o \sum_{i=1}^N \underline{\underline{N}}_i l_i(u_o, v_o) \sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_j^l l_j(u_o, v_o) l_m(u_o, v_o) \\ &= |J_F^l| \sum_{l=o}^O p_o \underline{\underline{N}}^o \sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_j^l l_j(u_o, v_o) l_m(u_o, v_o) \end{aligned}$$

où  $\underline{\underline{N}}^o = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{N}}_i l_i(u_o, v_o)$ . La matrice locale  $\underline{\underline{M}}$  s'écrit donc :  $\underline{\underline{M}} = |J_F^l| \sum_{o=1}^O p_o \underline{\underline{M}}^o$  où la matrice  $\underline{\underline{M}}^o$  est composée de  $N \times N$  blocs de taille  $n_V \times n_V$ , le bloc  $(i, j)$  étant  $\underline{\underline{N}}^o l_i(u_o, v_o) l_j(u_o, v_o)$ .

○ Cas 2 : Nous montrons ici comment s'exprime une matrice locale  $\underline{\underline{M}}$  telle que  $\underline{\underline{M}} (\underline{\varphi}_1^l; \dots; \underline{\varphi}_N^l)^T$  corresponde à l'expression :

$$\forall \psi_m \int \int_{D_l} \underline{\underline{N}} \partial_x \underline{\varphi} \psi_m dx dy,$$

l'expression obtenue est similaire  $\underline{\underline{M}} = |J_F^l| \sum_{o=1}^O p_o \underline{\underline{M}}^o$  où à nouveau la matrice  $\underline{\underline{M}}^o$  est composée de  $N \times N$  blocs de taille  $n_V \times n_V$ , le bloc  $(i, j)$  étant  $\underline{\underline{N}}^o l_i(u_o, v_o) \partial_x l_j(u_o, v_o)$  où  $\partial_x l_j(u, v) = \partial_x u \partial_u l_j(u, v) + \partial_x v \partial_v l_j(u, v)$ .

## 3.2 Modélisation de conditions aux limites non réfléchissantes

L'étude d'un phénomène physique sur un domaine non borné par voie numérique impose fatalement l'introduction d'une méthode permettant de tronquer le domaine physique. Par rapport au domaine physique, le domaine de calcul fait ainsi apparaître de nouvelles frontières, appelées dans cette thèse

6. Comme nous le verrons au paragraphe suivant, la condition d'orthogonalité par rapport à la fonction test scalaire  $\psi_m(x, y) = L_m(x, y)$  permet d'obtenir les lignes  $(m-1)n_V + 1$  à  $m n_V$  de la matrice locale. Cela est équivalent à appliquer la condition d'orthogonalité par rapport aux fonctions test vectorielles  $L_m(x, y) \underline{e}_v$  pour  $v \in \llbracket 1, n_V \rrbracket$  avec  $(\underline{e}_i)_j = \delta_{ij}$ , la fonction test vectorielle  $L_m(x, y) \underline{e}_v$  donnant la ligne  $(m-1)n_V + v$  de la matrice locale.

«frontières ouvertes». Dans le cas d'un problème d'acoustique, il est nécessaire que d'une part aucune onde non physique ne rentre dans le domaine de calcul et que d'autre part une onde se propageant dans le domaine de calcul ne soit pas réfléchi lorsqu'elle atteint une frontière ouverte. Ce travail de thèse portant sur l'étude de l'aéroacoustique en conduit, nous nous limiterons à l'étude d'un conduit infini présentant une zone rendant le problème non homogène selon l'axe du conduit, voir figure 3.4. La non-homogénéité peut être provoquée par un changement de géométrie (présence d'une cavité, d'un objet dans le conduit), de conditions aux limites (passage d'une paroi rigide à une paroi revêtue d'un matériau absorbant), d'une modification de l'écoulement etc . . . Les conditions aux limites artificielles modélisant les frontières ouvertes sont imposées en  $x = x_0^g$  et  $x = x_0^d$ . Ces deux positions doivent être choisies suffisamment éloignées de la zone non homogène pour retrouver un comportement homogène en  $x$ .

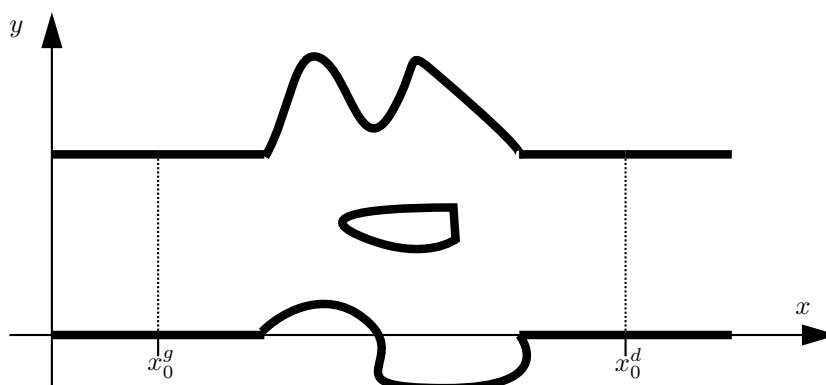


FIGURE 3.4 – Schéma représentant la troncation d'un conduit exhibant une région de non-homogénéité en  $x$ .

Il existe de multiples conditions aux limites artificielles, chacune possédant ses avantages et défauts. Nous présentons ici brièvement les principales méthodes avant de s'intéresser en particulier aux conditions aux limites non réfléchissantes dites PML pour «Perfectly Matched Layer».

### 3.2.1 Quelques exemples de conditions aux limites non réfléchissantes

#### Condition aux limites caractéristique

La condition aux limites basée sur la méthode des caractéristiques est appréciée pour sa simplicité. Son fonctionnement repose sur le même principe que le flux décentré amont présenté en section 3.1.1.1. L'idée est de faire «sortir» l'onde à la frontière ouverte en utilisant les caractéristiques sortantes et de ne rien laisser rentrer dans le domaine de calcul. Dans le cas d'une discrétisation par la méthode Galerkin discontinue, il suffit d'imposer à la frontière fluide un flux décentré amont où la trace extérieure est prise nulle. Malheureusement, une telle condition aux limites devient moins précise pour des ondes dont le vecteur d'onde n'est pas orthogonal à la frontière ouverte.

#### Impédance de sortie

Une autre méthode consiste à imposer en sortie du domaine une impédance de sortie égale à 1 ou fixée à partir de données expérimentales comme c'est le cas dans la référence [80]. Comme la condition artificielle basée sur la méthode des caractéristiques, ce type de conditions aux limites non réfléchissantes n'est précis que dans le cas où l'onde sortante est normale à la frontière ouverte.

#### Condition aux limites DtN, «Dirichlet to Neumann»

Dans le cas d'un problème harmonique où la pulsation  $\omega$  est imposée via une source quelconque, il est possible d'utiliser une condition aux limites DtN pour «Dirichlet to Neumann». L'imposition d'une condition aux limites DtN en  $x_0^g$  et  $x_0^d$  s'écrit respectivement  $\partial_n \varphi = \underline{T}^g(\varphi)$  et  $\partial_n \varphi = \underline{T}^d(\varphi)$ , où  $\partial_n = \nabla \cdot \underline{n}$ . L'expression des opérateurs DtN  $\underline{T}^g$  et  $\underline{T}^d$  est obtenue à partir de la connaissance des modes acoustiques

dans les zones homogènes du conduit ( $x < x_0^g$  et  $x > x_0^d$ ). La solution pour  $x > x_0^d$  est prise comme une somme des modes propres se propageant vers les  $x$  positifs, de valeur propre  $k_x^n$  associé à la fonction propre  $\varphi^n$  <sup>7</sup> :

$$\varphi(x; y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\varphi) \varphi^n(y) e^{ik_x^n(x-x_0^d)}.$$

Dans le cas où l'opérateur régissant la dynamique du problème est normal, l'amplitude  $A_n(\varphi)$  portant le mode  $n$  est obtenue par orthonormalité des modes propres :  $A_n(\varphi) = \langle \varphi(x_0^d; y); \varphi^n \rangle$ . L'opérateur  $T^d(\varphi)$  s'écrit alors :

$$T^d(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} i k_x^n \langle \varphi(x_0^d; y); \varphi^n \rangle \varphi^n(y).$$

En revanche, dans le cas où le problème est non normal l'utilisation de la méthode est plus délicate mais reste possible dans certains cas. Un article paru lors de ce travail de thèse [120] étend l'utilisation de la méthode à des conduits traités acoustiquement. L'introduction d'une condition d'impédance rendant l'opérateur non normal, les auteurs développent une relation de biorthogonalité rendant possible l'expression de  $A_n(\varphi)$ .

En pratique la somme est tronquée à un ordre fini  $N$ . Celui-ci est par exemple choisi de façon à observer la convergence de la solution (voir Redon et collab. [120, figures 9 et 11]).

### Méthode des éléments infinis

La méthode des éléments infinis est utilisée pour le calcul acoustique en domaine fréquentiel sans écoulement [3], cas pour lequel les équations d'Euler se simplifient en l'équation de Helmholtz harmonique eq. (3.20).

$$\Delta \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{\omega^2}{a_0^2} a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0. \quad (3.20)$$

L'idée de la méthode est de résoudre par une méthode des éléments finis classique un premier domaine noté  $\Omega_c$  où se trouve la zone physique à étudier. Ce domaine  $\Omega_c$  est alors entouré d'un deuxième domaine noté  $\Omega_R$  de rayon extérieur  $R$  que l'on fait tendre vers l'infini, voir figure 3.5(a). La résolution dans le domaine  $\Omega_R$  se fait par la méthode des éléments infinis qui consiste d'une part à imposer sur la frontière extérieure  $\Gamma_R$  une condition de rayonnement de Sommerfeld eq. (3.21) (puisque  $R \rightarrow \infty$ ) et d'autre part à résoudre l'équation (3.20) sur un type d'élément particulier : les éléments infinis dont un exemple est représenté figure 3.5(b).

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \partial_r \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) - i \frac{\omega}{a_0} a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Cette méthode peut être applicable à l'acoustique en domaine temporel [63] et en présence d'un écoulement porteur à condition que celui-ci soit irrotationnel. Cette méthode n'est en revanche pas applicable à l'étude acoustique en conduit.

## 3.2.2 Conditions aux limites PML (Perfectly Matched Layer)

### 3.2.2.1 Introduction

Les conditions aux limites PML pour «Perfectly Matched Layer» ont été introduites initialement pour la résolution des équations de Maxwell par Béranger [35]. Le principe général de la méthode est d'ajouter en amont de  $x_0^g$  et en aval de  $x_0^d$  une zone tampon absorbante (voir figure 3.6) où l'entrée des ondes se fait théoriquement sans réflexion quels que soient leur fréquence ou leur angle.

L'application des PML à un cadre acoustique est due à Hu [71] qui a proposé une formulation pour la résolution des équations d'Euler linéarisées avec écoulement constant. Cette formulation s'est avérée être instable [146] à cause d'une incohérence possible en présence d'écoulement entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'une onde [72, 34].

---

7. La construction de l'opérateur DtN en  $x_0^g$  est similaire.

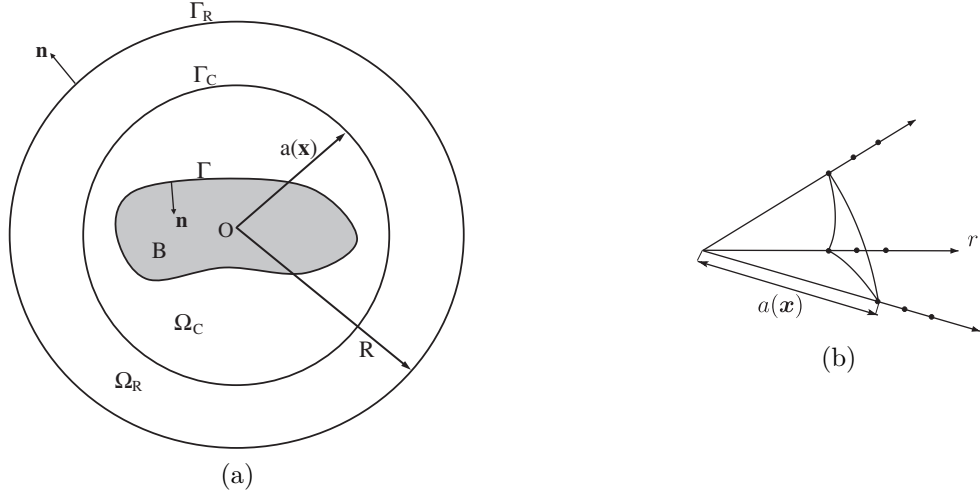


FIGURE 3.5 – Schématisation de l'utilisation de la méthode des éléments infinis pour le calcul de la diffraction autour d'un objet noté B (a) et d'un élément P1 infini (b) (source [52]).

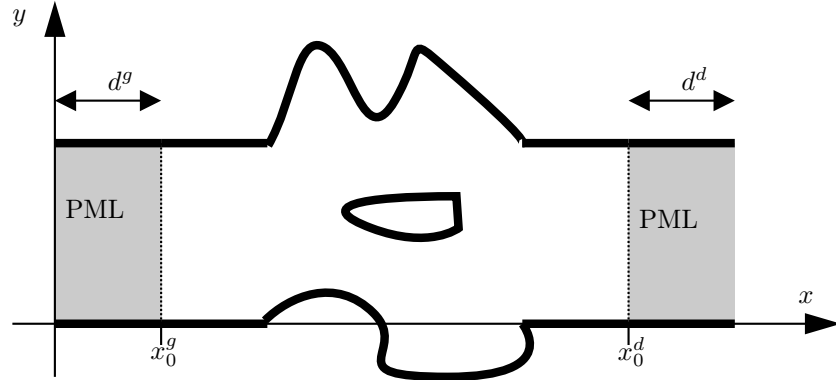


FIGURE 3.6 – Utilisation de zones PML permettant de tronquer le domaine physique.

D'un point de vue mathématique, les PML ont été introduites par une formulation séparée («split formulation» en anglais). Dans le cas d'un écoulement constant dans un conduit, les équations s'écrivent :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \underbrace{\begin{pmatrix} U_0 & 0 & a_0 \\ 0 & U_0 & 0 \\ a_0 & 0 & U_0 \end{pmatrix}}_{\underline{A}_x} \partial_x \underline{\varphi} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \\ 0 & a_0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{A}_y} \partial_y \underline{\varphi} = \underline{0}.$$

La formulation séparée consiste, comme son nom l'indique, à séparer le problème selon les deux directions dans la zone PML. Les équations s'écrivent alors dans la zone PML :

$$\begin{cases} \partial_t \underline{\varphi}_1 + \Sigma'(x) \underline{\varphi}_1 + \underline{A}_x \partial_x \underline{\varphi} = \underline{0} \\ \partial_t \underline{\varphi}_2 + \underline{A}_y \partial_y \underline{\varphi} = \underline{0} \\ \text{avec } \underline{\varphi} = \underline{\varphi}_1 + \underline{\varphi}_2 \end{cases}$$

avec  $\Sigma'(x)$  le coefficient d'amortissement permettant l'absorption des ondes dans la zone PML. Cette formulation s'est avérée être équivalente à un prolongement analytique dans la zone PML [39] dont l'expression est donnée par l'équation eq. 3.22 :

$$x \rightarrow x + i \frac{\Sigma(x)}{\omega}. \quad (3.22)$$

$\Sigma(x)$  est généralement défini comme une fonction polynômiale en  $x$  :

$$\Sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0(x - x_0^d)^\beta & \text{pour } x > x_0^d \\ 0 & \text{pour } x_0^g \leq x \leq x_0^d \\ -\sigma_0(x_0^g - x)^\beta & \text{pour } x < x_0^g \end{cases} \quad (3.23)$$

### 3.2.2.2 Transformation spatio-temporelle

Soit une fonction  $f(x, y)$  modélisant une onde  $f(x, y) \sim \exp(ik_x x)g(y)$ . Le prolongement analytique du terme  $\exp(ik_x x)$  vaut :

$$\exp(ik_x x) \rightarrow \exp(ik_x x) \exp\left(-i \frac{\Im(k_x)}{\omega} \Sigma(x)\right) \exp\left(-\frac{\Re(k_x)}{\omega} \Sigma(x)\right), \quad (3.24)$$

le terme  $\exp(-\Re(k_x)/\omega \Sigma(x))$  agissant sur l'amplitude. Que ce soit dans le domaine PML amont ou aval, ce terme correspondra bien à un amortissement de l'onde si celle-ci se propage vers les  $x$  positifs et que son nombre d'onde est tel que  $\Re(k_x) > 0$  ou inversement si l'onde se propage vers les  $x$  négatifs et que son nombre d'onde est tel que  $\Re(k_x) < 0$ .

Cela revient à dire que pour une onde, de couple  $(\omega; k)$ , régie par la relation de dispersion  $D(k; \omega) = 0$ , il doit y avoir cohérence de signe entre la vitesse de groupe  $c_g = d_k \omega$  et la vitesse de phase  $c_\varphi = \omega/k$ , ce qui peut être formalisé par la condition  $c_g c_\varphi > 0$ <sup>8</sup>. Dans le cas contraire, le terme  $\exp(-\Re(k_x)/\omega \Sigma(x))$  agit comme une amplification de l'onde. Or il est bien connu qu'en présence d'écoulement, il existe des modes pour lesquels  $c_g c_\varphi < 0$  (voir par exemple en annexe la section B.1.1.1). La solution proposée est alors d'imposer une transformation spatio-temporelle dans la zone PML pour rendre les vitesses de phase et de groupe cohérentes [72, 62, 33].

Avec écoulement, la relation de dispersion donne lieu à trois types d'ondes : les ondes acoustiques, les ondes de vorticité et les ondes d'entropie. Ces deux derniers types d'ondes sont de nature hydrodynamique et leurs vitesses de phase et de groupe sont donc cohérentes (car toutes les deux de même signe que l'écoulement porteur). En revanche, une incohérence est possible entre  $c_g$  et  $c_\varphi$  pour des ondes acoustiques.

Dans le cas d'un écoulement uniforme de nombre de Mach  $M = 0,2$  (cas soluble analytiquement voir en annexe section B.2.1), les couples  $(\omega; k)$  correspondant aux modes acoustiques d'ordre  $n \in \{1; 2; 3\}$  en  $y$  (pour  $n = 0$ ,  $c_g c_\varphi > 0$ ) sont tracées figure 3.7(a). La zone grisée représente l'ensemble des lieux où il y a incohérence de signe en  $c_g$  et  $c_\varphi$ . Les points où la relation de dispersion est satisfaite et où  $c_g = 0$  sont alignés dans le plan  $(k; \omega)$ , l'équation de la droite étant donnée par  $\omega(k) = -a_0 k(1 - M^2)/M$ . L'application de la transformation spatio-temporelle

$$t \rightarrow \mathring{t} = t + \tau x \quad (3.25)$$

transforme  $k$  en  $\mathring{k} = k + \tau \omega$ . Ainsi avec<sup>9</sup> :

$$\tau = \frac{1}{a_0} \frac{M}{1 - M^2}$$

il y a bien cohérence de signe entre  $c_g$  et  $c_\varphi$  comme l'indique la figure 3.7(b) repr sant la relation de dispersion après transformation spatio-temporelle.

Hu [73, section 3] a montré que pour un écoulement porteur cisailé repr sant une couche de mélange dont la composante de vitesse selon  $x$  et la masse volumique sont données par eqs. (3.26), les couples  $(\omega; k)$  vérifiant  $D(\omega; k) = 0$ , correspondant à des ondes acoustiques et de vitesse de groupe nulle étaient regroupés autour d'une droite dans le plan  $(k; \omega)$ . Cette remarquable propriété permet l'utilisation de la transformation spatio-temporelle eq. (3.25) où  $\tau$  est déterminé à partir du coefficient directeur de cette droite.

$$\begin{cases} U_0(y) = \frac{1}{2} \left[ (U_1 + U_2) + (U_1 - U_2) \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) \right] \\ \rho_0(y) = \rho \left[ T_1 \frac{U_0(y) - U_2}{U_1 - U_2} + T_2 \frac{U_1 - U_0(y)}{U_1 - U_2} + \frac{\gamma - 1}{2} (U_1 - U_0(y))(U_0(y) - U_2) \right]^{-1} \end{cases} \quad (3.26)$$

8. Il est considéré ici que la direction de propagation de l'onde est donnée par sa vitesse de groupe, bien que Brambley [22, Annexe A] ait montré que dans certains cas celle-ci n'est pas suffisante et qu'il faut utiliser le critère Briggs-Bers.

9. On reconnaît une transformation de type Prandtl-Glauert.

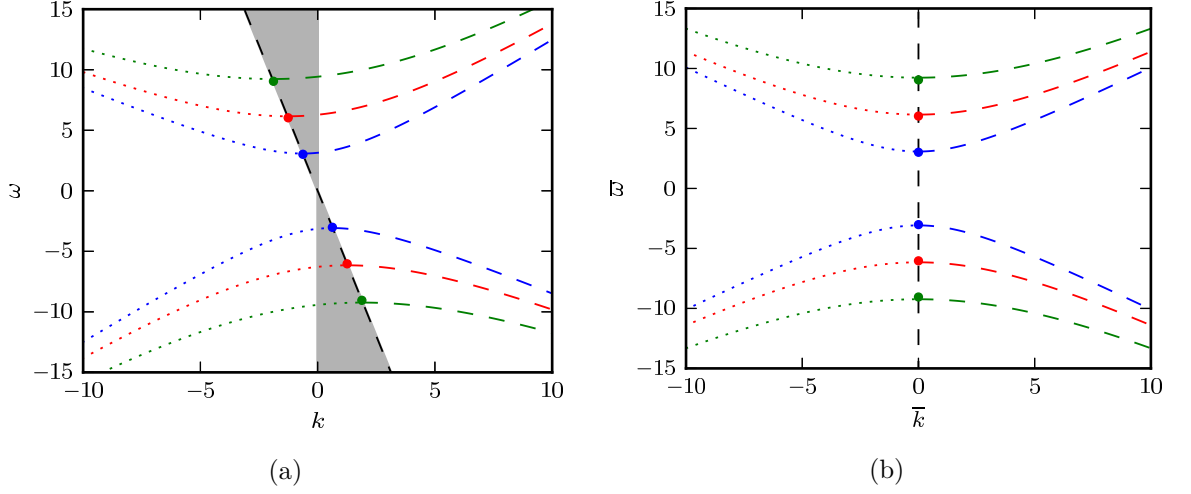


FIGURE 3.7 – Relation de dispersion sans (a) et avec (b) transformation spatio-temporelle pour  $n = 1$  (en bleu),  $n = 2$  (en rouge) et  $n = 3$  (en vert). Les disques pleins donnent les points où  $c_g = 0$  (..... :  $c_g < 0$  et --- :  $c_g > 0$ ) (d'après [74, Figures 1 et 2]).

Hu va alors plus loin et montre que ce même résultat est obtenu pour des écoulements de Poiseuille et de jet à masse volumique constante. À partir d'observations empiriques, il montre que le calcul de  $\tau$  par la formule eq. (3.27) fonctionne dans de nombreux cas d'écoulements cisailés à masse volumique constante.

$$\tau = \frac{1}{a_0} \frac{\overline{M}}{1 - \overline{M}^2} \quad (3.27)$$

$\overline{M}$  est le nombre de Mach moyen :  $\overline{M} = \frac{1}{H} \int_0^H M_0(y) dy$ .

### 3.2.2.3 Expression des équations dans les couches PML

Les équations d'Euler linéarisées pour un conduit bidimensionnel sont rappelées ici :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} = \underline{0} \text{ dans } \Omega ,$$

avec  $\underline{\varphi} = (u; v; a_0 \frac{\rho}{\rho_0})^T$ ,  $\underline{\underline{A}}_x = \begin{pmatrix} U_0 & 0 & a_0 \\ 0 & U_0 & 0 \\ a_0 & 0 & U_0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{\underline{A}}_y = \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0 & a_0 \\ 0 & a_0 & V_0 \end{pmatrix}$  et  $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \partial_x U_0 & \partial_y U_0 & 0 \\ \partial_x V_0 & \partial_y V_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

La première étape consiste à appliquer la transformation spatio-temporelle définie eq. (3.25), pour cela  $\underline{\hat{\varphi}}$  est défini tel que  $\underline{\varphi}(x, t) = \underline{\hat{\varphi}}(x, \hat{t})$ . En notant alors que :

$$\begin{cases} \partial_x \underline{\varphi} = \partial_x \underline{\hat{\varphi}} + \tau \partial_{\hat{t}} \underline{\hat{\varphi}} \\ \partial_t \underline{\varphi} = \partial_{\hat{t}} \underline{\hat{\varphi}} \end{cases} ,$$

les équations d'Euler linéarisées s'écrivent dans  $(x, \hat{t})$  :

$$(\underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x) \partial_{\hat{t}} \underline{\hat{\varphi}} + \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\hat{\varphi}} + \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\hat{\varphi}} + \underline{\underline{B}} \underline{\hat{\varphi}} = \underline{0} .$$

Cette dernière équation a pour expression dans le domaine fréquentiel :

$$-i\hat{\omega} (\underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x) \underline{\hat{\varphi}} + \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\hat{\varphi}} + \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\hat{\varphi}} + \underline{\underline{B}} \underline{\hat{\varphi}} = \underline{0} . \quad (3.28)$$

L'application du prolongement analytique eq. (3.22) est imposée via  $\partial_x \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\Sigma'}{\hat{\omega}}} \partial_x$  :

$$(-i\hat{\omega} + \Sigma') (\underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x) \underline{\hat{\varphi}} + \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\hat{\varphi}} + \left(1 + i \frac{\Sigma'}{\hat{\omega}}\right) \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\hat{\varphi}} + \left(1 + i \frac{\Sigma'}{\hat{\omega}}\right) \underline{\underline{B}} \underline{\hat{\varphi}} = \underline{0} ,$$



ce qui donne, en repassant dans le domaine temporel  $t$  initial, le système d'équation eq. (3.29) :

$$\begin{cases} \partial_t \underline{\varphi} + \underline{A}_j \partial_j \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{A}_y \partial_y \underline{\varphi} + (\underline{B} + \Sigma' \underline{I} + \Sigma' \tau \underline{A}_x) \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{B} \underline{\varphi} = 0 \\ \partial_t \underline{\phi} = \underline{\varphi} \end{cases} \quad (3.29)$$

#### 3.2.2.4 Stabilité des équations PML

Il a été montré précédemment que la transformation spatio-temporelle et le prolongement analytique, définis respectivement par eq. (3.25) et eq. (3.22), permettent l'atténuation des ondes des équations d'Euler linéarisées. Mais qu'en est-il des modes du système d'équations eq. (3.29) ? Hu [73, section 5] effectue une analyse de stabilité temporelle de ce système d'équation associé à l'écoulement porteur modélisant une couche de mélange présenté précédemment (eq. 3.26). Les calculs sont effectués pour  $\beta = 1$ , c'est-à-dire  $\Sigma'$  constant dans la zone PML, pour différentes valeurs de  $\Sigma' H/a_0 = \{0, 2; 2; 10\}$ , le problème étant discrétisé par une méthode de collocation spectrale basée sur les polynômes de Chebyshev. Hu montre alors que pour  $\Sigma' H/a_0 = 0, 2$  et  $\Sigma' H/a_0 = 2$ , le système est bien stable tandis que pour  $\Sigma' H/a_0 = 10$  il existe des valeurs propres  $\omega$  instables pour  $k$  élevé.

Cette valeur seuil de  $\Sigma'$  à partir de laquelle le système équation PML devient instable dépend fortement de l'écoulement considéré, dans le cas d'un écoulement de Couette, le système est stable pour  $\Sigma' H/a_0 < 100$  [73]. Cette limitation sur la valeur de  $\Sigma'$  suppose dans certains cas l'utilisation d'un domaine PML plus grand, avec pour conséquence une augmentation du coût du calcul. Hu propose une solution alternative qui consiste à étirer progressivement le maillage selon la direction  $x$  dans la zone PML. Cela a pour conséquence d'introduire un amortissement numérique stabilisant la formulation PML même quand la valeur de  $\Sigma'$  est supérieure à la valeur seuil calculée avec un maillage uniforme dans la zone PML [73, section 7].

#### 3.2.2.5 Implantation des PML dans une formulation Galerkin discontinue

Contrairement à une discrétisation de type différences finies, la méthode Galerkin discontinue présente l'avantage de fonctionner lorsque que  $\Sigma'(x)$  ne varie pas lentement au sein de la couche PML [4, 75]. Hu et Atkins [75] ont mené une analyse approfondie de l'utilisation de PML conjointement à une discrétisation Galerkin discontinue du système d'équations eq. (3.29) sur un maillage fait de quadrangles. Deux formulations Galerkin discontinues ont alors été construites, la première utilise comme flux numérique inter-éléments un flux décentré amont tandis que la deuxième utilise un flux de Lax-Friedrich. Ce dernier flux présente l'avantage d'être utilisable pour la résolution de nombreux problèmes mais n'est par contre pas aussi performant pour la résolution de problèmes d'ondes. De plus, Hu et Atkins montrent qu'il fait apparaître de nouveaux modes parasites au système d'équations eq. (3.29). Enfin, bien que théoriquement parfaitement non réfléchissante, la discrétisation des équations des équations PML a pour conséquence d'introduire des réflexions numériques à l'interface entre la zone physique et la zone PML. Une augmentation de la résolution du schéma permet de faire tendre le taux de réflexion numérique vers zéro.

#### 3.2.2.6 PML et calcul de modes propres acoustiques

Peu de méthodes permettent le calcul de modes acoustiques dans un problème ouvert. Fuß et collab. [52] ont utilisé la méthode des éléments infinis présentée section 3.2.1 pour le calcul des modes acoustiques résonants en absence d'écoulement autour d'un objet en champ libre.

L'étude des modes acoustiques résonants (ou piégés) en conduit ou en champ libre au moyen des PML a fait l'objet de nombreux travaux [65, 49, 84, 119]. Ces études ont été exclusivement menées avec un écoulement porteur nul et ont consisté d'un point de vue mathématique en la résolution de l'équation d'Helmholtz harmonique eq. (3.20). Koch [84] s'est intéressé au calcul des modes résonants d'une cavité en conduit ou en champ libre, Hein et collab. [65] ont appliqué la méthode des PML au calcul de modes résonants en cavité obstruée par différents types d'objets (plaque plane centrée ou non, cylindre à base rectangulaire, etc ...). Duan et collab. [49] ont approfondi ces travaux en s'intéressant au calcul des modes piégés dans de telles configurations.

Le prolongement analytique utilisé dans les zones PML lors de ces études est :

$$x \rightarrow x + i\Sigma(x). \quad (3.30)$$

La formulation PML ainsi obtenue n'est donc pas valide pour toutes les fréquences et le choix de  $\Sigma'$  doit donc être ajusté selon la portion du spectre étudié : si des modes à basses fréquences sont recherchés  $\Sigma'$  devra être élevé et inversement pour la recherche de modes à hautes fréquences. Une analyse des paramètres de la couche PML est présentée dans la référence [65, section 3] pour une configuration unidimensionnelle admettant une solution analytique.

### Quelques résultats théoriques sur la modification du spectre d'un opérateur par l'utilisation de PML

Outre des valeurs propres discrètes correspondant aux modes résonants et piégés, le spectre de l'opérateur contient un spectre continu dû au caractère infini du problème, les modes correspondant sont appelés mode de Béranger [135]. À titre d'exemple est représenté figure 3.8 le spectre obtenu par Koch [84] dans un conduit de hauteur  $H$  où se trouve une cavité. Les calculs ont été effectués par une méthode de collocation spectrale basée sur les polynômes de Chebyshev et le domaine physique a été tronqué grâce à l'utilisation de zones PML. Le spectre présente des branches infinies droites partant des fréquences de

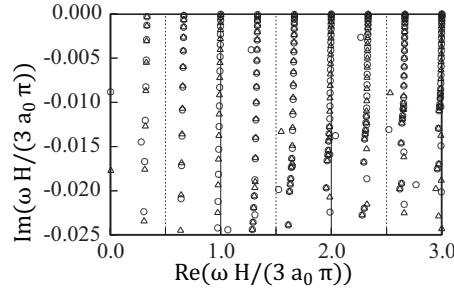


FIGURE 3.8 – Spectre obtenu dans un conduit de hauteur  $H$  avec cavité. Les fréquences de coupure  $\omega = a_0 n \pi / H$  correspondent à  $\frac{\omega H}{3a_0 \pi} = \frac{n}{3}$ . Les différents symboles correspondent à l'utilisation de condition de symétrie ou d'antisymétrie (source : [84]).

coupure pour  $n \neq 0$  et allant vers  $\Im(\omega) \ll 0$ . Une autre branche similaire, non visible sur la figure 3.8, part d'une fréquence réelle négative [65]. Les travaux de thèse [59] et [82] portant sur l'étude théorique du calcul modal en présence de PML montrent que ces branches correspondent à une rotation du spectre essentiel de l'opérateur due à l'utilisation de PML. Cette rotation est d'ailleurs quantifiable dans le cas d'une PML de dimension infinie [59, chapitre 2].

L'utilisation de PML crée de plus une pollution numérique empêchant dans certains cas le calcul des modes physiques et faisant apparaître des modes parasites. Cette pollution numérique est liée à une croissance exponentielle de la norme de la résolvante en fonction de la position à laquelle commence la couche PML dans certaines régions du spectre où il n'y pas de valeurs propres [59, section 3.2], [82, chapitre 6]. Il est ainsi conseillé de placer le domaine PML le plus près possible de la zone d'étude (cela permettant évidemment en plus de réduire le nombre de points de calcul).

Les branches continues, correspondant à une modification du spectre essentiel continu par l'utilisation de couches PML, sont moins intéressantes d'un point de vue physique, deux méthodes permettent alors de les filtrer :

- Les modes propres associés à ces branches continues ayant des fonctions propres existant principalement dans la couche PML, Shi et collab. [142] (dans un cadre d'étude en électromagnétique) proposent de les filtrer en comparant l'énergie dans le domaine physique  $P_{phy}$  à l'énergie dans le domaine PML  $P_{PML}$ .
- Ces modes étant dus à l'utilisation de couches PML, ils dépendent des paramètres PML. Reicherberger [119] propose ainsi d'effectuer un filtrage à partir de la sensibilité des valeurs propres au paramètre  $\sigma_0$ .

### 3.3 Résolution d'un problème aux valeurs propres en stabilité globale modale

L'étude de stabilité globale modale consiste en la résolution d'un problème aux valeurs propres, dont la valeur propre est la pulsation en approche temporelle et le nombre d'onde en approche spatiale. Pour une étude sur une configuration simple (géométrie simple, écoulement de base ne variant pas brutalement), l'usage d'une discrétisation par une méthode de collocation spectrale basée sur des polynômes de Chebyshev est courante. Les matrices du problème aux valeurs propres ainsi discrétisé sont de taille limitée et une résolution «directe» du problème aux valeurs propres est alors possible au moyen d'une factorisation QR (QZ en complexe). En revanche, pour des problèmes plus complexes impliquant des matrices de grandes tailles, la résolution directe a un coût prohibitif et des méthodes itératives sont donc utilisées.

#### 3.3.1 Méthode d'Arnoldi, mise en œuvre «classique»

##### 3.3.1.1 Principe

La méthode itérative d'Arnoldi, largement employée en stabilité globale, permet le calcul d'une partie des valeurs propres de plus grand module d'une matrice. En pratique, un tel calcul donnerait les modes les plus stables ( $\Im(k) \gg 0$  en stabilité spatiale ou  $\Im(\omega) \ll 0$  en stabilité temporelle), physiquement moins intéressants. L'idée est alors de procéder à une transformation spectrale pour obtenir non pas les valeurs propres de plus grand module mais celles autour d'une cible. La transformation spectrale dite «shift-invert» transforme le problème aux propres<sup>10</sup>

$$\underline{D}X = ik\underline{E}X \quad (3.31)$$

en

$$\begin{cases} \tilde{\underline{D}}X = \lambda_k X \\ \tilde{\underline{D}} = (\underline{D} - ik_\sigma \underline{E})^{-1} \underline{E} \\ \lambda_k = \frac{1}{i(k - k_\sigma)} \end{cases} \quad (3.32)$$

Les valeurs propres de plus grand module du problème eq. (3.32) correspondent alors aux valeurs de  $k$  les plus proches de la cible  $k_\sigma$ , les vecteurs propres étant inchangés.

La résolution du problème aux valeurs propres eq. (3.32) de dimension  $N$  par la méthode d'Arnoldi consiste à projeter le problème sur un espace de Krylov de dimension  $m \ll N$  défini par ( $\underline{q}_1$  est un vecteur d'initialisation<sup>11</sup>) :

$$\mathcal{K}_m(\tilde{\underline{D}}; \underline{q}_1) = \{\underline{q}_1; \tilde{\underline{D}}\underline{q}_1; \dots; \tilde{\underline{D}}^{m-1}\underline{q}_1\}.$$

Cet espace de Krylov est alors orthonormalisé en la base générée par  $(\underline{q}_j)_{1 \leq j \leq m}$ . La projection de  $\tilde{\underline{D}}$  sur cette base orthonormée s'écrit :

$$\tilde{\underline{D}}\underline{Q}_m = \underline{Q}_m \underline{H}_m + \underline{r}_m \underline{e}_m^T \quad (3.33)$$

où  $\underline{Q}_m$  est la matrice unitaire dont les colonnes sont les vecteurs  $\underline{q}_j$ ,  $\underline{H}_m$  est une matrice de Hessenberg supérieure de dimension  $m$  et  $\underline{r}_m$  est un vecteur résiduel. Dans le cas où  $\underline{r}_m = \underline{0}$ , les valeurs de la matrice  $\underline{H}_m$  sont valeurs propres de la matrice  $\tilde{\underline{D}}$ . La matrice  $\underline{H}_m$  étant de dimension  $m \ll n$ , le calcul de ses valeurs propres peut se faire de façon directe.

L'idée est donc d'obtenir le résidu  $\underline{r}_m$  le plus petit possible, cela est possible pour une valeur faible de  $m$  si  $\underline{q}_1$  est composé principalement des vecteurs propres recherchés. Or cela n'est généralement pas le cas en pratique et cela impose donc, à première vue, de prendre une valeur élevée de  $m$  ce qui a pour conséquences d'augmenter le coût en terme de stockage de la méthode et surtout le temps de calcul (la détermination de  $\underline{q}_i$  est d'autant plus lourde que  $i$  est élevé, la condition d'orthogonalité devant être imposée par rapport à  $i - 1$  vecteurs). Plusieurs solutions sont envisageables :

---

10. Le cas de la stabilité spatiale est choisi ici, la démarche est strictement identique pour une étude de stabilité temporelle.

11.  $\underline{q}_1$  est le plus souvent généré aléatoirement mais peut avantageusement être initialisé à partir d'une connaissance a priori des vecteurs propres du problème.

- Méthode par «redémarrage explicite» : l'idée est de chercher le vecteur d'initialisation  $\underline{q}_1$  minimisant  $\|\underline{r}_m\|$  en répétant le processus d'Arnoldi où à chaque redémarrage le vecteur  $\underline{q}_1$  est initialisé à partir d'information extraites de  $\underline{H}_m$ .
- La méthode par «redémarrage implicite» consiste à effectuer une factorisation d'Arnoldi d'ordre  $m$  et de la réduire en une factorisation d'ordre  $m - p$  contenant les informations importantes par une méthode QR. La factorisation d'ordre  $m - p$  est alors étendue à l'ordre  $m$  et ainsi de suite. Cette méthode est plus performante que celle par redémarrage explicite et est celle implantée dans la librairie largement utilisée ARPACK [142].

L'utilisation de la transformation spectrale shift-invert passe par la résolution d'un système linéaire de matrice  $\underline{D} - ik_\sigma \underline{E}$ . Il est courant de choisir une cible  $k_\sigma$  telle que  $\Im(k_\sigma)$  soit inférieure à la partie imaginaire du mode le plus instable pour s'assurer que  $\underline{D} - ik_\sigma \underline{E}$  soit inversible. D'un autre côté, il est préférable que  $k_\sigma$  soit le plus proche des valeurs propres recherchées pour que les valeurs propres du problème transformé soient bien séparées, favorisant ainsi la convergence du processus d'Arnoldi.

L'application de la matrice  $(\underline{D} - ik_\sigma \underline{E})^{-1}$  peut alors se faire soit par résolution itérative soit par méthode directe :

- La résolution itérative (généralement au moyen des méthodes BICGSTAB ou GMRES) offre l'avantage de simplement nécessiter non pas la connaissance de la matrice mais simplement le produit matrice vecteur. Les performances du calcul sont fortement dépendantes du préconditionneur choisi et du conditionnement de la matrice à inverser. Afin d'améliorer ce dernier point, il est courant de préférer la transformation spectrale de Cayley à la transformation shift-invert [85] et le problème ainsi transformé s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\bar{D}} \underline{X} = \lambda_k \underline{X} \\ \underline{\bar{D}} = (\underline{D} - \sigma \underline{E})^{-1} (\underline{D} - \mu \underline{E}) \\ \lambda_k = \frac{ik - \mu}{ik - \sigma} \end{cases} \quad (3.34)$$

- La résolution directe du système linéaire présente une étape préliminaire coûteuse de factorisation LU, le processus d'Arnoldi étant en revanche bien moins coûteux ensuite. La matrice doit évidemment être toujours inversible mais son conditionnement n'est plus un paramètre déterminant pour les performances de la méthode. La méthode shift-invert est alors suffisante et dans le cas où la matrice n'est pas trop non normale il n'est pas forcément nécessaire d'imposer à la cible d'avoir une partie imaginaire inférieure à la partie imaginaire du mode le plus instable.

### 3.3.2 Couplage de la méthode d'Arnoldi avec un solveur DNS

#### 3.3.2.1 Application du Jacobien à partir d'un code DNS

Il a été montré en section 3.3.1.1 qu'en privilégiant les méthodes itératives, il est possible de calculer les valeurs propres du problème aux valeurs propres simplement à partir d'un moyen d'évaluation des produits matrices vecteurs. Dans le cas d'une étude de stabilité temporelle, l'application du Jacobien  $\underline{L}$  défini tel que  $\partial_t \underline{\varphi} = \underline{L} \underline{\varphi}$  (dont l'expression pour la présente étude est donnée par eq. (2.3a)) peut être estimée par linéarisation de l'opérateur non linéaire associé noté  $\underline{F}$  régissant la dynamique non linéaire :  $\partial_t \underline{\phi} = \underline{F}(\underline{\phi})$ . Ainsi l'application de  $\underline{L}$  à un vecteur  $\underline{\varphi}$  est donnée par :

$$\underline{L} \underline{\varphi} = \frac{\underline{F}(\underline{\phi}^0 + \varepsilon \underline{\varphi}) - \underline{F}(\underline{\phi}^0)}{\varepsilon} \quad (3.35)$$

où  $\underline{\phi}^0$  représente le vecteur d'état de l'écoulement de base et  $\varepsilon \ll 1$ . Cette méthode est utilisée par Mack [90] dans sa thèse de doctorat pour le calcul de stabilité d'écoulement compressible autour d'objet parabolique en flèche. L'opérateur non linéaire  $\underline{F}$  est appliqué par utilisation d'un code DNS («Direct Numerical Simulation») intégrant un schéma compact aux différences finies d'ordre 6 et une intégration en temps explicite par une méthode Runge-Kutta d'ordre quatre. Une transformation spectrale de Cayley est appliquée et la résolution du système linéaire résultant est faite par la méthode BICGSTAB. Le système linéaire est préconditionné par décomposition  $ILLU(\tau; p)$  [136, section 10.3] d'une matrice obtenue par discrétisation du Jacobien par un schéma aux différences finies d'ordre deux.

Fosas de Pando et collab. [108] ont ensuite étendu cette méthode pour approximer l'application de l'opérateur adjoint.

### 3.3.2.2 Calcul par «Time-stepping»

La méthode dite de «time-stepping» permet l'analyse de stabilité linéaire modale temporelle et a été développée par Chiba [40] (en japonais) puis appliquée par Tezuka et Suzuki [149] pour le calcul de stabilité tridimensionnel d'un écoulement autour de sphéroïdes. La méthode consiste à calculer les pulsations propres du problème non pas par résolution du problème aux valeurs propres  $\underline{D}\underline{X} = i\omega\underline{E}\underline{X}$  dérivé par exemple des équations d'Euler linéarisées harmoniques eq. (2.6) (et des conditions aux limites associées) mais par le calcul des valeurs propres de l'opérateur d'évolution temporelle  $\underline{T}(s)$  défini précédemment et rappelé ici :

$$\underline{\varphi}(t+s) = \underline{T}(s)\underline{\varphi}(t) .$$

Les pulsations propres du problème sont liées aux valeurs propres de  $\underline{T}(s)$ , notées  $\omega_\lambda$ , par :

$$\omega = -\frac{\arg(\omega_\lambda)}{s} + i\frac{\ln(|\omega_\lambda|)}{s}, \quad (3.36)$$

les vecteurs propres étant identiques. L'étude de phénomènes physiques de période  $T_e$  nécessite évidemment de prendre  $T_e > 2s$ . L'application de  $\underline{T}(s)$  sur un vecteur  $\underline{\varphi}$  se fait par intégration temporelle à l'aide d'un solveur DNS de l'état  $\underline{\phi}^0 + \varepsilon\underline{\varphi}$  où  $\underline{\phi}^0$  représente le vecteur d'état de l'écoulement de base et  $\varepsilon \ll 1$ .

Le calcul des valeurs propres de  $\underline{T}(s)$  présente l'avantage de ne pas nécessiter de transformation spectrale puisque les valeurs propres  $\omega_\lambda$  de plus grand module correspondent bien aux modes les plus instables. De plus, la méthode ne nécessite pas de stockage de matrice. Elle est ainsi bien adaptée au calcul de stabilité de grande taille et a permis la première analyse de stabilité globale tridimensionnelle [149].

Si cette méthode s'avère être peu coûteuse en terme de stockage, elle présente en revanche des temps de calcul longs [97] et d'autant plus aux basses fréquences. Pérez et collab. [113] ont proposé une méthode de type shift-invert pour calculer une portion de spectre autour d'une cible à partir d'un calcul par time-stepping, le prix à payer étant alors la résolution d'un système linéaire.

### 3.3.3 Autres méthodes

La décomposition en modes dynamiques [141, 140], ou DMD, offre la possibilité de pouvoir extraire des informations sur la dynamique d'un système à partir de données obtenues avec une fréquence d'échantillonnage constante. La méthode s'applique aussi bien à des résultats obtenus expérimentalement [140] que numériquement [7].

Dans le cas où les données ont été obtenues numériquement à l'aide d'un solveur linéarisé, les modes calculés par la DMD correspondent aux modes résultant de la théorie de la stabilité linéaire. Ainsi Schmid [141] compare à titre de validation de la méthode, pour un écoulement de Poiseuille 2D, les fréquences propres obtenues par la théorie de la stabilité linéaire classique et par utilisation de la DMD sur des données obtenues avec un solveur Navier-Stokes linéarisé. Il montre ainsi que la DMD permet de retrouver avec précision les modes les moins atténués. Bagheri [7] propose une étude similaire dans le cas d'une couche limite de Blasius. À partir d'échantillons calculés par un solveur Navier-Stokes (donc non linéaire), Bagheri [7] s'est intéressé à la dynamique non linéaire d'un jet dans un écoulement transverse en utilisant la DMD pour le calcul des modes de Koopman.

La décomposition modale dynamique repose, comme la méthode d'Arnoldi, sur l'extraction d'informations à partir d'un espace de Krylov. La différence étant que ce dernier n'est pas orthonormalisé et donc la méthode ne nécessite qu'une séquence de données. L'absence d'orthonormalisation a, en revanche, un impact négatif sur la précision de la méthode.

La quasi-totalité des études de stabilité globale portant sur la résolution du problème aux valeurs propres  $\underline{D}\underline{X} = ik\underline{X}$  (en stabilité spatiale) ou  $\underline{D}\underline{X} = i\omega\underline{X}$  (en stabilité temporelle) a été conduite en utilisant la méthode itérative d'Arnoldi (généralement via la librairie ARPACK [85]).

Les méthodes itératives de type Davidson [70] permettent, elles aussi, le calcul d'une portion de spectre de matrices de grandes tailles autour d'une cible. De même que la méthode d'Arnoldi avec la transformation spectrale shift-invert, ce type de méthode nécessite aussi la résolution d'un système linéaire de grande taille avec l'avantage d'être plus performant dans le cas où la résolution de ce système se fait de façon

itérative. Pourtant, aucune étude de stabilité globale n'a été conduite à ce jour en résolvant le problème aux valeurs propres associé par une méthode de type Davidson.

## Deuxième partie

# Méthode numérique générale : développement du code EMILE





## CHAPITRE 4

# ADAPTATION D'UN SOLVEUR AÉROACOUSTIQUE POUR L'ANALYSE AÉROACOUSTIQUE MODALE

Nous présentons dans ce chapitre les évolutions apportées à la version préliminaire du solveur SPACE (présenté en section 3.1) afin de permettre le calcul de modes acoustiques sur des configurations longitudinales ou transverses. Les évolutions concernent soit directement la discrétisation Galerkin discontinue implantée dans la version préliminaire de SPACE : possibilité d'effectuer des calculs sur des configurations 2,5D, augmentation de l'ordre de discrétisation... , soit le couplage du code avec des bibliothèques de calcul de problème aux valeurs propres en vue d'effectuer le calcul des modes propres dans les cas longitudinal et transverse et en analyse spatiale et temporelle. Les performances numériques du calcul modal sont illustrées au travers d'exemples simples.

### Sommaire

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Extension du solveur aéroacoustique . . . . .</b>   | <b>55</b> |
| 4.1.1      | Extension au cas transverse . . . . .  | 55        |
| 4.1.2      | Augmentation de l'ordre de discrétisation . . . . .  | 57        |
| 4.1.3      | Autres modifications : gradients de l'écoulement de base . . . . .   | 57        |
| <b>4.2</b> | <b>Méthode de résolution du problème aux valeurs propres et couplage du code avec la librairie SLEPc . . . . .</b> | <b>58</b> |
| 4.2.1      | Méthode de Krylov-Schur . . . . .  | 58        |
| 4.2.2      | Utilisation de la librairie SLEPc . . . . .  | 58        |
| 4.2.3      | Illustration des propriétés de convergence . . . . .   | 58        |

## 4.1 Extension du solveur aéroacoustique

### 4.1.1 Extension au cas transverse

Les équations d'Euler linéarisées eq. (2.8) permettant le calcul dans la section transverse d'un conduit d'axe  $z$  d'une perturbation sous la forme  $\varphi(x; y) \exp(i(kz - \omega t))$  sont rappelées ici :

$$ik\underline{\underline{A}}_z \underline{\varphi} = i\omega \underline{\varphi} - \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\varphi} - \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi} - \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} .$$

Il est rappelé de plus que cette équation matricielle est associée à la condition aux limites d'impédance  $(\beta - 1)a_0 \frac{p}{\rho_0} + (\beta + 1)\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$  où  $\beta$  est le coefficient de réflexion acoustique défini par  $\beta = (Z - 1)/(Z + 1)$  (voir section 3.1.1.1).

Le vecteur d'état est  $\underline{\varphi} = (u; v; w; a_0 \frac{\rho}{\rho_0})^T$  et les matrices sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_x &= \begin{pmatrix} U_0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & U_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & U_0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{A}}_y = \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & V_0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & V_0 \end{pmatrix}, \\ \underline{\underline{A}}_z &= \begin{pmatrix} W_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_0 & a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & W_0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \partial_x U_0 & \partial_y U_0 & 0 & 0 \\ \partial_x V_0 & \partial_y V_0 & 0 & 0 \\ \partial_x W_0 & \partial_y W_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'écriture de la formulation Galerkin discontinue est analogue à celle présentée en section 3.1.1 : dans un premier temps est écrite l'équation variationnelle résultant de la condition d'orthogonalité sur l'élément  $D_l$  par rapport à l'ensemble des fonctions tests  $\underline{\psi}_m$  formant une base de  $P_p^N(D_l)$ , ensemble des polynômes d'ordre  $N_p$  définis sur l'élément  $D_l$ . L'équation variationnelle ainsi obtenue est intégrée par parties et le terme de flux physique apparaissant dans l'intégrande du terme de bord est remplacé par le flux numérique  $\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n})$ . Le problème est alors à nouveau intégré par partie pour s'écrire de façon identique au cas longitudinal (les matrices étant par contre différentes) :

$$\begin{aligned} \forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ + \int_{\partial D_l} \left[ \underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-, \underline{\varphi}^+, \underline{n}) - \underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi}^- \right] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Les flux numériques sont alors construits de manière analogue :

- Le flux inter-éléments est toujours le flux décentré amont :  $\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n}) = \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- \underline{\varphi}^+ + \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^+ \underline{\varphi}^-$  avec à présent :

$$\left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- = \min(0; U_n) \begin{pmatrix} n_y^2 & -n_x n_y & 0 & 0 \\ -n_x n_y & n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{U_n - a_0}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & (0; 0)^T & -\underline{n} \\ (0; 0) & 0 & 0 \\ -\underline{n}^T & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- De même le flux permettant d'imposer les conditions aux limites d'impédance est construit en suivant la même démarche pour donner :

$$\underline{\underline{M}}(\beta) = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} (\beta + 1) \underline{n} \otimes \underline{n} & (0; 0)^T & (\beta - 1) \underline{n} \\ (0; 0) & 0 & 0 \\ -(1 + \beta) \underline{n}^T & 0 & (1 - \beta) \end{pmatrix}.$$

La formulation Galerkin discontinue est alors identique à celle obtenue dans le cas longitudinal, les matrices étant en revanche différentes :

$$\begin{aligned} \forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- [[\underline{\varphi}]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}}(\beta) \underline{\varphi}^- \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Le résidu dépend du saut inter-éléments  $[[\underline{\varphi}]]$  via l'expression :

$$\left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- = \min(0; U_n) \begin{pmatrix} n_y (n_y [[u]] - n_x [[v]]) \\ n_x (-n_y [[u]] + n_x [[v]]) \\ [[w]] \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{U_n - a_0}{2} \begin{pmatrix} n_x [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_x \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ n_y [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_y \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ 0 \\ - [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] + \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Dans le cas où l'écoulement porteur est axial ( $\underline{U}_0 = W_0 \underline{e}_z$ ), cette expression devient

$$\left[ \underline{A}_j n_j \right]^- = + \frac{U_n - a_0}{2} \begin{pmatrix} n_x [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_x \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ n_y [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_y \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ 0 \\ - [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] + \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

et le résidu est alors fonction du saut de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  et de vitesse normale entre éléments.

#### 4.1.2 Augmentation de l'ordre de discrétisation

Dans la version préliminaire du code **SPACE** sur laquelle est basé le code **EMILE**, la solution et les fonctions tests sont cherchées pour un triangle  $D_l$  sur  $P^1(D_l)$  (espace des polynômes d'ordre 1). Les performances de la méthode Galerkin discontinue peuvent être améliorées en augmentant l'ordre de discrétisation de la méthode. En effet, par rapport à la méthode des éléments finis, le fait d'augmenter l'ordre  $N$  des polynômes permet d'atténuer l'effet de l'augmentation du nombre de points de calculs résultant de la séparation des éléments. De plus, il a été montré en section 3.1.2.1 lors de l'étude des propriétés dispersives et dissipatives dans un cadre unidimensionnel que pour respecter une précision donnée, le nombre de points nécessaires par longueur d'onde diminuait avec l'ordre des polynômes  $N$ .

Nous nous proposons d'augmenter l'ordre des polynômes de 1 à 2. En plus d'une augmentation des performances, cette extension nous a permis d'identifier les étapes entrant dans la modification de l'ordre de discrétisation des polynômes en vue de futures modifications : ajout adaptabilité  $p$  (c'est-à-dire possibilité de changer localement l'ordre des polynômes) et discrétisation par des polynômes d'ordre  $N_p = 6$  (il sera alors judicieux de passer à des maillages curvilignes).

Les détails de l'implantation ne sont pas donnés dans ce manuscrit de thèse. Dans le tableau 4.1 sont donnés les six points de contrôle ainsi que les polynômes de Lagrange relatifs au triangle de référence  $D$ . Les trois points de contrôle des éléments unidimensionnels sont  $-1$ ,  $0$  et  $1$  et sont respectivement associés aux polynômes de Lagrange  $(u^2 - u)/2$ ,  $1 - u^2$  et  $(u^2 + u)/2$ .

TABLE 4.1 – Coordonnées des points de discrétisation dans le repère lié au triangle de référence  $D$  et expressions des polynômes de Lagrange associés à chacun de ces points de contrôle pour  $N_p = 2$ .

| Point | Coordonnées : $(u; v)$ | Polynôme de Lagrange $l_i(u; v)$  |
|-------|------------------------|-----------------------------------|
| 1     | (0; 0)                 | $1 - 3u - 3v + 2u^2 + 4uv + 2v^2$ |
| 2     | (1; 0)                 | $-u + 2u^2$                       |
| 3     | (0; 1)                 | $-v + 2v^2$                       |
| 4     | (1/2; 1/2)             | $4uv$                             |
| 5     | (0; 1/2)               | $4v - 4uv - 4v^2$                 |
| 6     | (1/2; 0)               | $4u - 4uv - 4u^2$                 |

#### 4.1.3 Autres modifications : gradients de l'écoulement de base

Le calcul de la matrice de rigidité locale par quadrature nécessite de pouvoir évaluer la valeur du champ de base et de ses dérivées aux points de quadrature. Dans la version préliminaire du code **SPACE**, les valeurs des grandeurs dérivées ne sont pas des données directes du champ de base mais sont calculées à partir des grandeurs non dérivées. À titre d'exemple, lors du calcul sur un triangle quelconque  $D_l$ , l'expression de  $\partial_x U_0$  au point de quadrature  $(u_o; v_o)$  est donnée par :

$$\partial_x U_0(u_o; v_o) = \sum_{i=1}^N U_0(u_i; v_i) \partial_x l_i(u_o; v_o),$$

où  $\partial_x l_i$  est exprimé à partir de la matrice Jacobienne (eq. (3.19)).

Afin d'éviter une trop grande erreur numérique lorsque des champs à forts gradients sont étudiés, nous préférons considérer les dérivées comme une donnée du problème au même titre que les composantes de vitesse de l'écoulement de base.

## 4.2 Méthode de résolution du problème aux valeurs propres et couplage du code avec la librairie SLEPc

### 4.2.1 Méthode de Krylov-Schur

Bien qu'implémentée dans le code EMILE, la méthode de time-stepping n'a pas été utilisée pour le calcul modal temporel. Les problèmes considérés menant à des matrices de tailles suffisamment modérées pour permettre leur stockage, nous avons opté pour une résolution des problèmes aux valeurs propres écrits sous les formes génériques  $\underline{D}\underline{\varphi} = ik\underline{E}\underline{\varphi}$  et  $\underline{D}\underline{\varphi} = i\omega\underline{E}\underline{\varphi}$  par une méthode de type Arnoldi.

La méthode choisie est la méthode dite de Krylov-Schur qui est une généralisation de la méthode d'Arnoldi<sup>1</sup>. Le choix de cette méthode est justifié par les performances supérieures de cette méthode à celle d'Arnoldi [68]. Pour plus de détails sur le principe de la méthode, le lecteur est invité à se tourner vers la référence [68].

Une transformation spectrale shift-invert (voir section 3.3.1.1) est utilisée et la résolution du système linéaire résultant est effectuée par méthode directe. L'utilisation des méthodes itératives GMRES et BICGSTAB associées aux préconditionneurs ASM et ILU a été testée mais les performances obtenues n'ont pas donné raison à l'utilisation de ces méthodes. Leur utilisation future n'est pas exclue mais nécessitera un travail approfondi de recherche du meilleur préconditionneur et des paramètres associés aux méthodes itératives.

### 4.2.2 Utilisation de la librairie SLEPc

La résolution du problème aux valeurs propres est effectuée par la librairie SLEPc [67] qui est une extension de la librairie PETSc [9]. Ces librairies permettent le calcul parallèle par MPI et peuvent être interfacées avec d'autres librairies notamment MUMPS [2] qui sera utilisée pour la résolution directe du système linéaire, la décomposition LU implantée dans PETSc n'étant pas parallèle.

Hormis pour quelques rares calculs, les mêmes paramètres sont gardés. Jusqu'à 40 itérations sont autorisées, les sous-espaces sont pris de dimension 80 et 30 modes propres sont demandés. Ainsi un calcul convergé donnera entre 30 et 80 valeurs propres, le test de convergence du mode propre  $(k; \underline{\varphi})$  étant donné par :

$$\frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{D}\| + |k| \|\underline{E}\|} < 10^{-4}. \quad (4.3)$$

La méthode de Krylov-Schur (comme la méthode d'Arnoldi) permet d'évaluer directement le résidu lors du processus itératif. Si une transformation spectrale est utilisée, ce calcul peut s'avérer être peu précis et nous préférons forcer le calcul du résidu par son expression exacte lors des tests de convergence.

### 4.2.3 Illustration des propriétés de convergence

#### 4.2.3.1 Effet du raffinement sur la précision numérique

Nous présentons dans cette section l'effet du raffinement du maillage sur la précision obtenue sur les modes acoustiques. Cette étude permet pour les études suivantes d'avoir une première idée du raffinement à imposer selon les phénomènes physiques étudiés.

Pour cela des calculs de modes acoustiques dans la section transversale<sup>2</sup> d'un conduit de hauteur  $H$  et de largeur  $L = AH$  ( $A$  est le rapport d'aspect) sont effectués.  $A = 3$  est choisi et  $\omega H/a_0 = 2,35$ . Pour cette configuration académique, des solutions analytiques existent (voir annexe B.1.1) et ainsi le

---

1. La décomposition d'Arnoldi eq. (3.33) est modifiée en une décomposition dite de Krylov en remplaçant  $\underline{H}_m$  par  $\underline{B}_m$  qui n'est pas une matrice de Hessenberg supérieure (mais la décomposition est bien telle que ses vecteurs propres approximent les vecteurs propres du problème aux valeurs propres de grande taille à résoudre).

2. Les conclusions déduites ici concernant l'effet du maillage sur la précision sont aussi valides dans le cas longitudinal.

mode  $(m; n)$  dont la fonction propre présente  $m/2$  longueurs d'onde selon  $x$  et  $n/2$  longueurs d'onde selon  $y$  est donné par :

$$k_{m,n}^a = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}.$$

Pour cette étude, deux maillages structurés sont générés en répétant le motif représenté figure 4.1. Le premier maillage a été construit en prenant le pas de maillage  $\Delta h_1 = \Delta x = \Delta y = L/50$  et le deuxième avec  $\Delta h_2 = \Delta x = \Delta y = L/75$ .

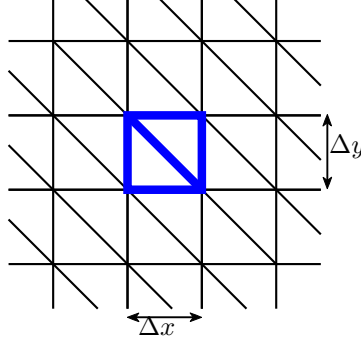


FIGURE 4.1 – Motif utilisé pour la construction de maillages structurés.

Pour chaque maillage et pour chaque mode  $(m; n)$ , le nombre d'onde  $k$  est calculé numériquement. L'erreur relative par rapport à la solution analytique est tracée en fonction de  $\lambda_T/\Delta h$  sur la figure 4.2 où  $\lambda_T$  est la longueur d'onde dans le plan donnée par :

$$\lambda_T = \frac{2\pi}{k_T} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = \frac{2H}{\sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + n^2}}.$$

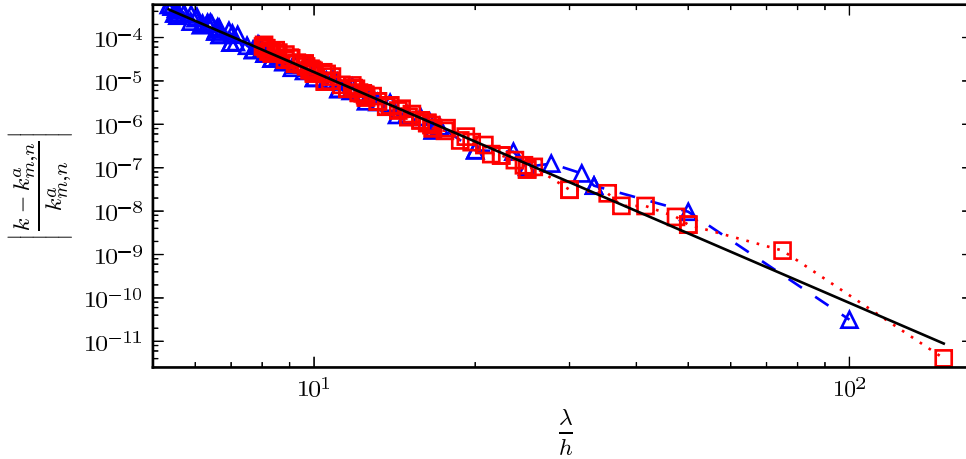


FIGURE 4.2 – Effet du raffinement sur la précision : tracé de  $\left| \frac{k - k_{m,n}^a}{k_{m,n}^a} \right|$  en fonction de  $\lambda_T/\Delta h$  pour les maillages de pas  $\Delta h_1$  (-△-) et  $\Delta h_2$  (-□-) et estimation de l'ordre de convergence (— :  $3,32 \times (\frac{\lambda_T}{\Delta h})^{-5,31}$ ).

L'erreur relative obtenue varie entre  $4,05 \times 10^{-12}$  pour  $\lambda_T/\Delta h = 150$  et  $5,71 \times 10^{-4}$  pour  $\lambda_T/\Delta h = 5,38$  et suit globalement la loi :

$$\left| \frac{k - k_{m,n}^a}{k_{m,n}^a} \right| = 3,32 \times \left( \frac{\lambda_T}{\Delta h} \right)^{-5,31} \quad (4.4)$$

| Algorithmes | Robustesse | Performance | Qualité des éléments |
|-------------|------------|-------------|----------------------|
| MeshAdapt   | 1          | 3           | 2                    |
| Delaunay    | 2          | 1           | 2                    |
| Frontal     | 3          | 2           | 1                    |

TABLE 4.2 – Classement des algorithmes de maillage (source : [57]).

une convergence d'ordre cinq est ainsi observée.

➤ Remarque : Nous avons mené une étude similaire, parue dans les références [112] et [111], où seuls les modes  $(0; m)$  et  $(0; n)$  avaient été considérés pour estimer l'erreur numérique. Une convergence d'ordre 5 avait là aussi été observée, l'interpolation de l'erreur relative suivant une évolution en  $(\lambda_T/\Delta h)^{-5,19}$ .

#### 4.2.3.2 Effet de l'algorithme de maillage sur la précision

Lors de ce travail de thèse, les maillages ont été générés par le mailleur **Gmsh** [57]. Ce dernier propose trois algorithmes de maillage appelés «MeshAdapt», «Delaunay» et «Frontal». Le tableau 4.2 donne le classement de chaque algorithme pour trois catégories. Pour illustrer l'effet de la qualité des éléments sur la précision, nous reprenons la configuration physique de la section 4.2.3.1 et nous nous intéressons à l'erreur numérique obtenue pour les maillages construits en répétant le motif représenté fig. 4.1 et en utilisant les trois algorithmes de maillage et cela pour les deux pas  $\Delta h_1$  et  $\Delta h_2$ . Les courbes d'erreurs sont tracées figure 4.3 en fonction du coefficient de propagation  $\eta$  (défini eq. (2.9)). L'effet du type de

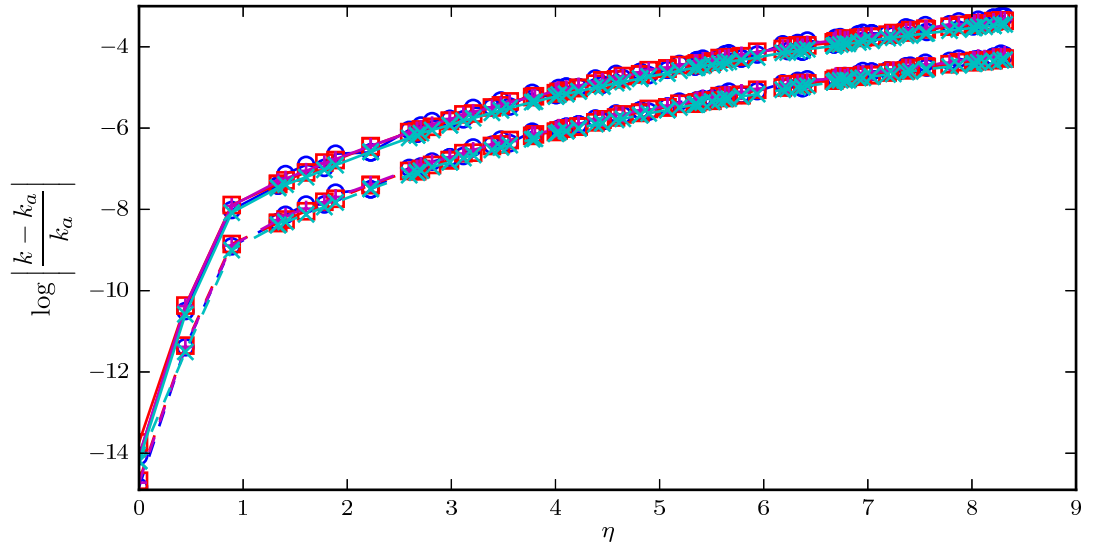


FIGURE 4.3 – Effet de l'algorithme sur la précision numérique : tracés de  $\left|\frac{k - k_a}{k_a}\right|$  en fonction de  $\eta$  pour un maillage structuré (en bleu) et des maillages générés par les algorithmes MeshAdapt (en rouge), Delaunay (magenta) et Frontal (cyan) pour les pas de maillages  $\Delta h_1$  (trait continu) et  $\Delta h_2$  (trait pointillé).

génération de maillage n'a qu'un effet modéré sur la précision. Hormis pour le mode  $(0; 0)$  et pour le maillage de pas  $\Delta h_1$ , l'erreur obtenue pour l'algorithme Frontal est toujours inférieure. Les courbes d'erreur obtenues avec les algorithmes MeshAdapt et Delaunay sont très proches et l'erreur obtenue avec le maillage structuré oscille autour de ces courbes, illustrant ainsi le fait que le maillage généré en répétant le motif représenté fig. 4.1 a des directions privilégiées [76].

Les configurations étudiées lors de ce travail de thèse étant de géométrie ni particulièrement grande (cas où l'algorithme Delaunay est conseillé), ni particulièrement complexe (cas où l'algorithme MeshAdapt est recommandé), l'algorithme Frontal est utilisé dans la grande majorité des cas.

### 4.2.3.3 Complexité temporelle de la résolution

Les calculs menés lors de cette thèse ont été effectués sur les calculateurs «Naruto» et «Stelvio» de l'Onera. Naruto est muni de processeurs Xeon Woodcrest 5160 cadencés à 3GHz avec une mémoire vive disponible de 4 Go. Stelvio, plus puissant, est composé de processeurs Intel Xeon X5560 (Nehalem) quadri-cœurs 2,8GHz et 36 Go de mémoire, de processeurs Intel Xeon X5675 (Westmere) hexa-cœurs 3,06 GHz et 48 Go de mémoire et de processeurs Intel Xeon X5440 (Harpertown) quadri-cœurs 2,8 GHz et 32 Go de mémoire.

Afin de donner un ordre de grandeur des temps de calculs et d'étudier la complexité temporelle de la résolution, nous traçons figure 4.4 l'évolution du temps de résolution en fonction de la dimension du problème  $N_{mat}$  pour des calculs séquentiels effectués sur différents maillages et avec différentes conditions d'écoulement. Ces calculs sont effectués sur la calculateur Naruto en résolvant le système linéaire résultant de la transformation spectrale shift-invert avec la décomposition LU implantée dans PETSc et sur le calculateur Stelvio où la résolution du système linéaire est faite par la factorisation LU implantée dans PETSc et par celle de MUMPS.

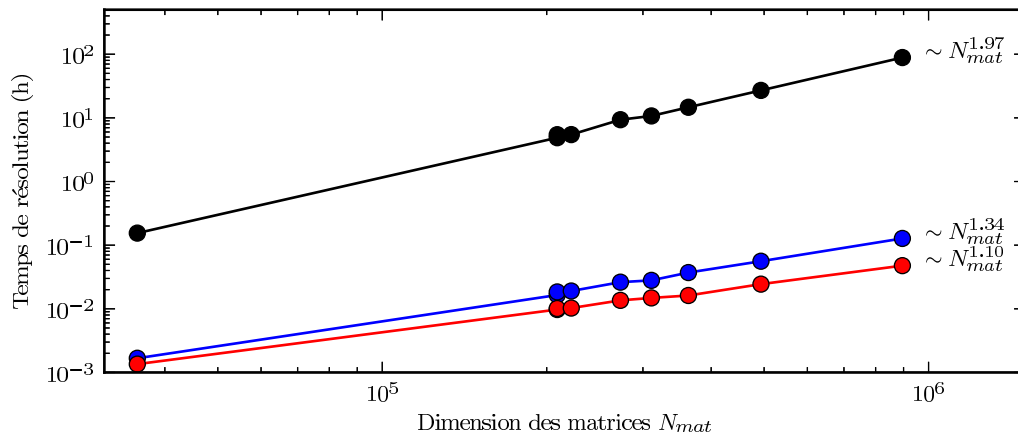


FIGURE 4.4 – Complexité temporelle (calcul séquentiel) - Les résultats en bleu et en rouge correspondent aux calculs effectués sur Stelvio avec les décomposition LU respectivement de PETSc et de MUMPS. Les résultats en noir correspondent aux calculs menés sur Naruto avec la factorisation LU implantée dans PETSc.

Concernant les résultats obtenus par la factorisation de PETSc, le fait que les calculs soient plus rapides sur Stelvio était bien évidemment attendu. Néanmoins, il est remarquable que la complexité temporelle soit meilleure :  $O(N_{mat}^{1.34})$  sur Stelvio et  $O(N_{mat}^{1.97})$  sur Naruto. De plus, il est observé qu'en plus de permettre la parallélisation de la résolution du système linéaire, l'utilisation de MUMPS offre de meilleures performances en séquentiel, la complexité temporelle observée étant en  $O(N_{mat}^{1.10})$ .

➤ Remarque : D'après la figure 4.4, le problème de plus grande dimension ( $N_{mat} \approx 10^6$  degrés de liberté) est effectué sur Stelvio en moins de 3 minutes. Les études menées pendant ce travail de thèse n'ayant pas donné lieu à des problèmes de plus grandes dimensions, les calculs modaux présentés par la suite sont généralement séquentiels ou effectués sur un faible nombre de processeurs ( $\leq 8$ ).





## **Troisième partie**

# **Application du code EMILE pour le calcul de modes dans une section transverse**



## CHAPITRE 5

# APPLICATION DU CODE À DES CONFIGURATIONS TRANSVERSES AVEC RUPTURE D'IMPÉDANCE

Dans ce chapitre, nous appliquons le code EMILE pour le calcul des modes acoustiques en présence de rupture d'impédance dans la section transversale d'un conduit. Nous présentons tout d'abord une retranscription d'un article publié portant sur le cas d'un conduit circulaire uniformément revêtu d'un matériau absorbant hormis dans deux petites régions diamétralement opposées. Il est ainsi montré que la méthode Galerkin discontinue est particulièrement bien adaptée au calcul en présence de rupture d'impédance. Nous montrons de plus le caractère singulier de la perturbation acoustique au voisinage de la rupture d'impédance. Nous apportons une étude complémentaire à cet article portant sur l'effet de la forme du maillage au niveau d'une jonction entre le liner et la paroi rigide. L'application du code EMILE au calcul des modes acoustiques dans la section transversale d'un conduit de section carré représentant le banc B2A est ensuite présentée. L'objectif est d'étudier l'impact de la géométrie particulière du banc B2A où le matériau absorbant ne recouvre qu'une portion de la paroi inférieure.

### Sommaire

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>5.1</b> | <b>Discontinuous Galerkin method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices . . . . .</b> | <b>65</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Complément à l'article : effet de l'angle du maillage à la rupture . . . . .</b>   | <b>86</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Étude des effets 3D dans le banc B2A . . . . .</b>   | <b>87</b> |
| 5.3.1      | Effets sur l'évolution axiale . . . . .   | 88        |
| 5.3.2      | Effets sur l'évolution en $y$ . . . . .   | 89        |
| 5.3.3      | Étude sur l'évolution axiale avec écoulement . . . . .  | 91        |

## 5.1 Discontinuous Galerkin method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices

Cette section est la retranscription d'un article publié [112] portant sur le calcul de modes acoustiques en conduit traité acoustiquement hormis dans de petites régions appelées «splices». En plus du cas d'un conduit circulaire, cas principalement considéré dans cet article, des calculs modaux sont présentés pour des conduits de sections transverses carrée ou ellipsoïdale afin de montrer la capacité à traiter des géométries quelconques. Les trois géométries étant symétriques par rapport aux axes  $x$  et  $y$ , les calculs ont été menés sur un quart de domaine en appliquant successivement des conditions de symétrie et d'antisymétrie.

Le code a été validé pour une configuration uniformément traitée sans écoulement, cas pour lequel les modes sont connus analytiquement. Une deuxième phase de validation a consisté à comparer les

résultats du code avec des résultats donnés dans la littérature sur des configurations avec discontinuités d'impédance avec et sans écoulement porteur.

La modification des valeurs propres et vecteurs propres des modes induite par la présence de la splice a ensuite été étudiée. Il a été montré que la perturbation acoustique présente une singularité à la jonction entre la paroi rigide et le liner : la vitesse acoustique normale à la paroi est discontinue tandis que la vitesse tangentielle à la paroi présente un pic laissant penser que celle-ci est théoriquement infinie. En lien avec ce pic, la pression (donc  $a_0 \frac{p}{\rho_0}$ ) a une dérivée selon la direction tangente à la paroi théoriquement infinie. Numériquement, seule une très faible singularité est observable sur la pression. Les études précédentes ne font pas mention du caractère singulier de la perturbation acoustique à une jonction entre une paroi rigide et un liner, cela s'explique par le fait que l'étude des modes acoustiques en conduit se fait généralement par résolution de l'équation de Pridmore-Brown ne faisant apparaître que la pression acoustique.

➤ Remarque : Dans l'article, les équations d'Euler linéarisées ont été écrites sans dimension. La pression adimensionnée  $p/(a_0^2 \rho_0)$  est égale à  $\frac{1}{a_0} \times a_0 \frac{p}{\rho_0}$ .



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

## Journal of Sound and Vibration

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jsvi](http://www.elsevier.com/locate/jsvi)

# Discontinuous Galerkin method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices

L. Pascal\*, E. Piot, G. Casalis

ONERA, Department of Aerodynamics and Energetics modelling, The French Aerospace Lab, F-31055 Toulouse, France

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 4 July 2012

Received in revised form

7 January 2013

Accepted 13 January 2013

Handling Editor: J. Astley

Available online 13 February 2013

## ABSTRACT

A discontinuous Galerkin method for the discretisation of the linearised Euler equations is derived for the computation of acoustic modes in an infinite duct of arbitrary geometric shape in the presence of axial sheared flow. Validations are performed with analytical solutions in the case of a uniformly lined duct and comparisons are done with the literature in the case of a lined cylindrical duct with rigid splices. We take advantage of the discontinuous formulation to study the behaviour of the acoustic eigenfunctions in the vicinity of the liner-splice transition where singular behaviours of the acoustic perturbation are found.

© 2013 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Inviscid stability analysis performed in a lined or unlined infinite duct in the presence of flow or not is an important tool in acoustics since it gives an insight on the physical phenomena responsible for the propagation and radiation of the noise generated by an aircraft engine. In some cases, solutions may be simply expressed through Bessel functions whereas more elaborated analytical or even numerical methods are required in most cases.

Present paper focuses on the case of a cylindrical infinite duct uniformly lined except at some “small” parts. This models the intake of an engine (see for instance [1]) where the lining is formed by joining together pieces of liners, leaving unlined areas at the joints, called splices. In addition, small areas of the lining may be replaced by hard patches for maintenance reasons. These splices may have a significant effect on the radiated noise and therefore the infinite duct model presenting lining non-uniformities or discontinuities has been already the object of many studies [2–6] by means of various methods (analytical or numerical). Except in specific cases with thin splices (see [6]), the effect of the splices is generally to reduce the damping, as it would be guessed since the lined area is smaller. Mustafi et al. [7] considered the case of a square hard patch in a uniformly lined flow duct. They showed that the relative sound power level increases with the patch width up to a width of the same magnitude as the incident mode azimuthal wavelength. Another consequence of the presence of splices is the scattering of acoustic cut-on modes into modes of different azimuthal orders. Finally, as discovered by Bi et al. [5] and studied as well by Brambley et al. [6], in the presence of rigid splices in a lined duct, a new kind of mode called “localised” mode (Brambley et al. call them “trapped” modes) may appear and is characterised by the fact that it exists only near the splices. It has been shown that a localised mode originates as a surface wave and turns into an acoustic wave as the splice width increases.

\* Corresponding author. Tel.: +33 562252232.

E-mail addresses: [lucas.pascal@onera.fr](mailto:lucas.pascal@onera.fr) (L. Pascal), [estelle.piot@onera.fr](mailto:estelle.piot@onera.fr) (E. Piot), [gregoire.casalis@onera.fr](mailto:gregoire.casalis@onera.fr) (G. Casalis).

The previous investigations of circumferentially non-uniformly lined duct have been conducted by means of finite element method with [4] and without flow [2] or by means of multimodal method [3,5] in the presence of uniform flow. In these studies, the equations are written under the Pridmore–Brown form and therefore the only considered variable is the acoustic pressure. The multimodal method consists in expanding the searched solution in terms of the eigenmodes of the rigid duct case or of the uniformly lined duct case (although for this configuration, the equations are not self-adjoint). On the contrary, Brambley et al. [6] searched the eigenmodes under the form of Fourier series derived using Green's function method, which ensures the completeness of the expansion. The method they proposed may be applied to ducts of arbitrary shape in the presence of any axial flow. In a similar way, this paper presents a numerical method for computing eigenmodes in a non-uniformly lined duct of arbitrary shape and carrying axial flow with special focus on the discontinuity effect induced by the splice. In addition to be able to handle complex geometries, the numerical method is required to have low numerical dissipation and dispersion. The discontinuous Galerkin method satisfies all these requirements and is hence used for the spatial discretisation. Moreover, the method offers the capacity to easily handle discontinuities, in particular at the boundaries. The discontinuous Galerkin method has been successfully employed in the calculation of modes arising from the incompressible Navier–Stokes equations on quite complex geometries [8]. The present code is derived from an existing Computational Aeroacoustics (CAA) solver based on the discontinuous Galerkin method developed at ONERA [9].

In the literature, lining discontinuities are not restricted to splices. It mainly arises when the liner is not axially infinite, which is usually addressed by the mode matching method [10]. In [2,4], the authors considered a liner which is axially finite and contains splices in the circumferential direction. Wright [2] derived a mode-matching procedure in the usual way, in the sense that the continuity of the pressure is imposed at the lining transition. Gabard and Astley [4] proposed a more elaborated matching scheme by deriving a variational formulation from the field equations. Another technique has been used by Rienstra [11] and Brambley [12], who investigated the scattering in an infinite duct at a sudden hard–soft wall impedance transition with uniform flow by means of the Wiener–Hopf method. Although all these investigations give interesting results on the acoustics scattering, none of them really focused on the local behaviour of the perturbation at the hard–soft lining transition. Unfortunately, as pointed out by Gabard and Astley [4] “there is as yet no definite and complete description of the physical mechanisms taking place at the transition from hard to soft surfaces with flow”. Moreover, even without flow, the local behaviour of the perturbation components at the lining transition is still an open problem.

In the present paper, focus is made on the acoustic modes computation in the case of two diametrically opposed splices as in Brambley et al. [6]. Section 2 provides the detailed context and the governing equations, which are discretised by means of the discontinuous Galerkin method described in Section 3. Sections 4–6 are devoted to numerical results: in Section 4, comparisons are presented with analytical solutions available for the uniformly lined duct without flow, and comparisons are done with the published results in the configuration with rigid splices and in the presence or not of sheared flow. The numerical performance of the method is presented as well. In Section 5 is presented a deeper study on the splice effects. More particularly, the shape of the eigenfunctions in the vicinity of the lining discontinuities resulting from the presence of the splices is investigated. Finally in Section 6 is shown the flexibility of the method by considering ducts of different geometries with flow and with lining discontinuities.

## 2. Governing equations

The considered geometry consists of an infinite circular duct of radius  $R$  uniformly lined except at two rigid splices. The splices are located around  $\theta = 0$  and  $\theta = \pi$  and are  $2\theta_s$  wide. The geometry is depicted in Fig. 1 together with the definitions of the Cartesian and cylindrical coordinates systems.

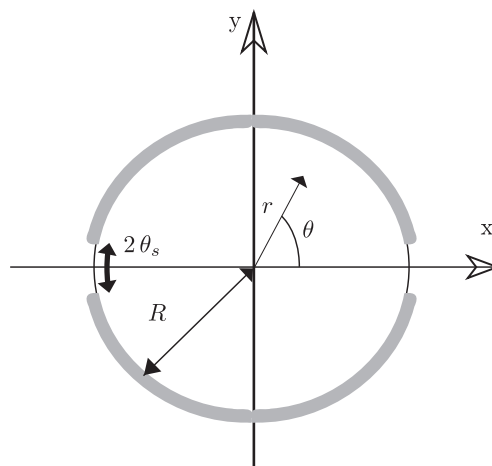


Fig. 1. Cylindrical spliced lined duct—the grey wide circular line represents the liner.

The main flow (denoted with subscript 0) is assumed to be stationary, subsonic and homentropic. Moreover the considered main flow velocity is oriented towards  $z$  and depends only on the radial coordinate  $r$ , the corresponding Mach number is denoted  $M_0$ . Finally the mean density  $\rho_0$  and the sound speed  $a_0$  are taken constant. The current method may also handle more complex main flows such as in the bypass duct of a turbofan where there are density gradients and a swirl component for instance. However, the configuration chosen in this paper represents the intake of a turbofan where the main flow model is simpler.

In the following, the different quantities are made dimensionless thanks to reference quantities:  $a_0$  for the velocity,  $\rho_0 a_0^2$  for the pressure,  $R$  for the length and  $R/a_0$  for the time.

The governing equations are the linearised Euler equations where the perturbations are taken under a wavelike form  $\tilde{\Phi}(x, y, z, t) = \exp(i(kz - \omega t))\Phi(x, y)$ ,<sup>1</sup>  $\omega$  being the dimensionless angular frequency,  $k$  the dimensionless wavenumber and  $\Phi = (\mathbf{u}, p)$  the unknown vector composed of the perturbation velocity vector and the perturbation pressure. The velocity vector in Cartesian coordinates writes  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$  and  $\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_z$  in cylindrical coordinates. The equations are then written in Cartesian coordinates system in the domain  $\Omega$  under the matrix form (the Einstein summation is used on  $x$  and  $y$ )

$$-i\omega\Phi + \mathbf{A}_j\partial_j\Phi + (\mathbf{B} + ik\mathbf{C})\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

where

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x M_0 & \partial_y M_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & M_0 \end{pmatrix}.$$

The boundary conditions on the perturbation at the wall  $\partial\Omega$  are imposed by means of an impedance condition modelled by Eq. (2) where  $Z$  is the specific acoustic impedance and  $\mathbf{n}$  is the outward-pointing unit normal vector:

$$p = Z\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (2)$$

But rather than using the specific impedance and Eq. (2), the reflection coefficient  $\beta$  defined as  $\beta = (Z-1)/(Z+1)$  is introduced to avoid singular behaviour when  $Z=0$  (soft wall) and  $Z \rightarrow \infty$  (hard wall). The boundary conditions at the wall become

$$(\beta-1)p + (\beta+1)\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (3)$$

Finally, no-slip boundary conditions are imposed on the main flow in order to avoid any vortex-sheet on the liner.<sup>2</sup>

For a chosen dimensionless angular frequency  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , the complex wavenumber  $k$  is computed as being an eigenvalue of the eigenproblem composed of Eqs. (1) and (2),  $\Phi$  being the eigenfunction.

### 3. Numerical method

In this section, the discontinuous Galerkin method applied to the problem formed by Eqs. (1) and (2) is briefly presented. A more detailed theoretical study may be found in [17].

The discontinuous Galerkin method is a local method: on each triangle  $(D_l)_{l \in [1, L]}$  (see Fig. 2) of the computational domain  $\Omega_h$  bordered by  $\partial\Omega_h$ , the solution is searched in  $P^2(D_l)$ , the space of second order polynomial defined on  $D_l$ . The solution is found locally by imposing a Galerkin condition (i.e. an orthogonality condition): the local residual must be orthogonal to every test-function  $\Psi_m$  belonging to the space of test functions  $V_h^l$ , chosen here as being in  $P^2(D_l)$ :

$$\forall l \in [1, L], \forall \Psi_m \in V_h^l \quad \int_{D_l} (-i\omega\Phi + \mathbf{A}_j\partial_j\Phi + (\mathbf{B} + ik\mathbf{C})\Phi) \cdot \Psi_m \, dx \, dy = 0 \quad (4)$$

<sup>1</sup> We choose to follow the stability convention in opposition to the acoustical convention for which the exponent is  $i(\omega t - kz)$ . This should be kept in mind when looking at computed spectra or impedance values.

<sup>2</sup> Else the perturbations would have to satisfy the Ingard–Myers boundary condition which takes into account the dynamic of the vortex sheet over the lining [13–16].

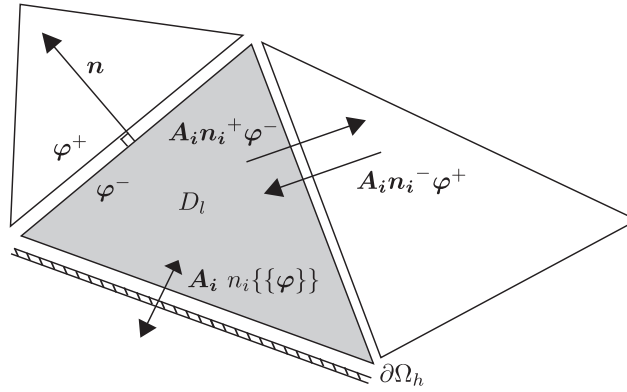


Fig. 2. Sketch of a triangle showing the interior and exterior traces and the numerical fluxes.

Integrating by parts yields

$$\forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \psi_m \in V_h^l \int_{D_l} (-i\omega \phi \cdot \psi_m - \partial_j (\psi_m \cdot \mathbf{A}_j) \phi + (\mathbf{B} + i\mathbf{k}\mathbf{C}) \phi \cdot \psi_m) dx dy + \int_{\partial D_l} n_j \mathbf{A}_j \phi \cdot \psi_m d\Gamma = 0 \quad (5)$$

where  $d\Gamma$  represents the unilinear differential along the boundary  $\partial D_l$ .

A particularity of the discontinuous Galerkin method is that the solution  $\phi$  is multiply defined on  $\partial D_l$ . The concept of interior and exterior traces of the solution is then introduced, respectively denoted  $\phi^-$  and  $\phi^+$  and defined as being  $\phi^\pm(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\mathbf{x} \pm \epsilon \mathbf{n})$  for  $\mathbf{x} \in \partial D_l$  and  $\mathbf{n}$  the vector normal to  $\partial D_l$  oriented outward from  $D_l$  (see Fig. 2). Therefore, the definition of the flux  $\mathbf{A}_j n_j \phi$  becoming ambiguous, it is replaced by a numerical flux depending on the interior and exterior traces and on the normal  $\mathbf{n}$ :  $\Pi(\phi^-, \phi^+, \mathbf{n})$ .

If  $\partial D_l$  is the border between two triangles, the numerical flux is constructed by means of the characteristics method and therefore takes into account the dynamics of the problem. As the matrix  $\mathbf{A}_j n_j$  is real and symmetric, it may be diagonalised:  $\mathbf{A}_j n_j = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{A}_j n_j]^+ + [\mathbf{A}_j n_j]^-$ . The matrix  $\mathbf{\Lambda}^+$  (respectively  $\mathbf{\Lambda}^-$ ) contains the positive (respectively negative) eigenvalues of  $\mathbf{A}_j n_j$  and hence its components correspond to the characteristics propagating out of  $D_l$  (respectively into  $D_l$ ). Finally, the resulting flux  $\Pi$  defined by Eq. (6) is a so-called upwind flux (as in finite volume method): “it takes the informations from where they are coming”.

$$\Pi = [\mathbf{A}_j n_j]^- \phi^+ + [\mathbf{A}_j n_j]^+ \phi^- \quad (6)$$

If  $\partial D_l$  belongs to the computational domain boundary (see Fig. 2):  $\partial D_l \cap \partial \Omega_h \neq \emptyset$ , the numerical flux is intended to enforce the boundary conditions. A centred flux is chosen  $\Pi = \mathbf{A}_j n_j (\phi^+ + \phi^-)/2$  where the exterior trace is required to satisfy  $p^+ = \beta p^- + (\beta + 1) \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}$  and  $\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} = (1 - \beta) p^- - \beta \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}$ . We checked that using this centred flux at an external boundary yields a better numerical accuracy than using the upwind flux (6).

Replacing in Eq. (5)  $\mathbf{A}_j n_j \phi$  by the appropriate numerical flux and integrating by parts again yields

$$\begin{aligned} \forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \psi_m \in V_h^l \int_{D_l} (-i\omega \phi + \mathbf{A}_j \partial_j \phi + (\mathbf{B} + i\mathbf{k}\mathbf{C}) \phi) \cdot \psi_m d\Omega \\ + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} [\mathbf{A}_j n_j]^- (\phi^+ - \phi^-) \cdot \psi_m d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \mathbf{M}(\beta) \phi^- \cdot \psi_m d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$\mathbf{M}(\beta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\beta + 1)n_x^2 & (\beta + 1)n_x n_y & 0 & (\beta - 1)n_x \\ (\beta + 1)n_x n_y & (\beta + 1)n_y^2 & 0 & (\beta - 1)n_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 + \beta)n_x & -(1 + \beta)n_y & 0 & (1 - \beta) \end{pmatrix}$$

The geometry of the problem (see Fig. 1) admits the vertical axis  $x=0$  and the horizontal axis  $y=0$  as symmetry axes. Thanks to these symmetry properties, the computations are performed on the domain contained between  $\theta=0$  and  $\theta=\pi/2$  depicted in Fig. 3 for the four different possible combinations of symmetry/antisymmetry properties on the two boundaries. The corresponding abbreviations are given in Table 1. Imposing a symmetry (respectively antisymmetry) property at a boundary on a variable ensures that this variable reaches an anti-node (respectively a node) on this boundary.

The symmetry and antisymmetry conditions are imposed through hard-wall and soft-wall boundary conditions. As a matter of fact, and as pointed out by Atkins [18], symmetry conditions on the pressure are identical to hard-wall boundary conditions. Likewise, antisymmetry conditions are identical to soft-wall boundary conditions. This may be shown by imposing on the exterior trace  $\phi^+$  the conditions  $\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}$  and  $p^+ = p^-$  (respectively  $\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}$  and  $p^+ = -p^-$ ). It results that  $[\mathbf{A}_j n_j]^- (\phi^+ - \phi^-) = \mathbf{M}(\beta = 1) \phi^-$  (respectively  $[\mathbf{A}_j n_j]^- (\phi^+ - \phi^-) = \mathbf{M}(\beta = -1) \phi^-$ ).



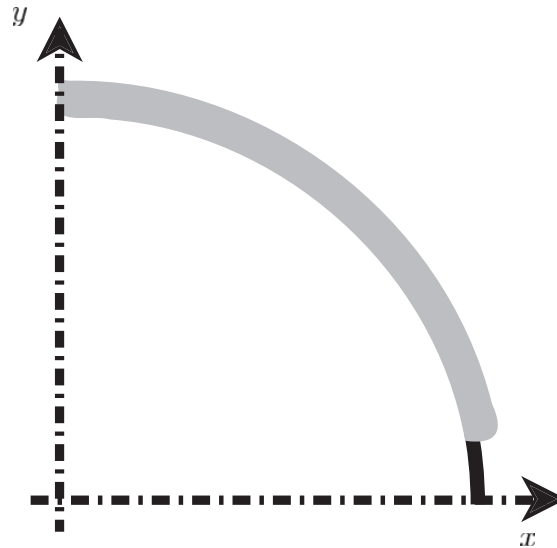


Fig. 3. Computational domain.

Table 1

Notations used for the symmetry properties of the computed modes.

| y-axis symmetry<br>property on $p$ | x-axis symmetry<br>property on $p$ | Abbreviation |
|------------------------------------|------------------------------------|--------------|
| Symmetry                           | Symmetry                           | SS           |
| Symmetry                           | Antisymmetry                       | SA           |
| Antisymmetry                       | Symmetry                           | AS           |
| Antisymmetry                       | Antisymmetry                       | AA           |

The discontinuous Galerkin formulation given by Eq. (7) may be written under the global matrix form:  $\mathbf{DX} = -ik\mathbf{EX}$ . This eigenvalue problem is solved with SLEPC [19] by means of the Krylov–Schur method and shift-invert spectral transformation. Thus, a computation does not give the full spectrum but only a few eigenvalues around a shift  $\sigma$ .

The method is suitable to handle any geometry since the mesh may be structured or not and may be refined locally (see Section 4.3 below).

## 4. Validations

### 4.1. Uniformly lined duct

This section deals with the no-flow ( $M_0 \equiv 0$ ) case where the duct is uniformly lined ( $\theta_s = 0$ ). The wavenumber  $k_{m,n}$  of the mode  $(m,n)$  (i.e. of azimuthal order  $m$  and radial order  $n$ ) admits an analytical solution  $k_{m,n} = \pm \sqrt{\omega^2 - Y_{m,n}^2}$  where  $Y_{m,n}$  is given by the  $n$ th solution of the equation

$$\frac{J'_m(X)}{J_m(X)} X = \frac{i\omega}{Z} \quad (8)$$

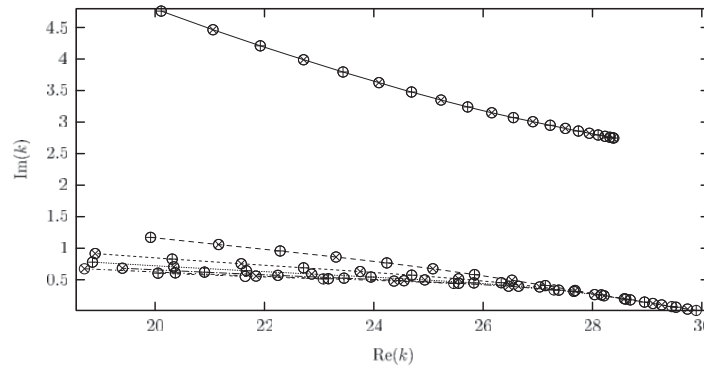
where  $J_m$  is the  $m$ -th order ordinary Bessel function of the first kind. The eigenfunction of the mode  $(m,n)$  is then:

$$p_{m,n}(r, \theta) = A^+ J_m(Y_{m,n} r) e^{im\theta} + A^- J_m(Y_{m,n} r) e^{-im\theta} \quad (A^+, A^-) \in \mathbb{C}^2 \quad (9)$$

A detailed analysis and a method to find the solutions are given in [20]. At high frequencies, representative of the turbofan acoustics, the radial modes  $n=1$  are so-called surface waves. As pointed out by Rienstra [20], they are modes which exist only in the vicinity of the liners. The radial modes  $n=2,3,4,\dots$  are genuine acoustic modes.

The angular frequency  $\omega = 30$  is chosen with  $Z = 2 + i$ . The values correspond to those chosen in [5] and Brambley et al. [6], and are relevant for the study of duct acoustics modelling engine nacelles. Same values will be imposed in Section 5 when studying the effects of the rigid splices.

The computations are done for the four cases SS, AS, SA, AA. Numerical results represented by open circles in Fig. 4 are superimposed to the analytic ones. The upper branch corresponds to surfaces waves ( $n=1$ ) and the other branches correspond to acoustic modes ( $n=2,3,4,\dots$ ). The lines corresponding to each branch are plotted by linking together the analytical eigenvalues corresponding to each radial mode. On each branch, the mode the most on the right is an axisymmetric mode ( $m=0$ ), the second mode is  $m=1$ , the third mode is  $m=2$ , and so on and so forth.



**Fig. 4.** Comparison between the numerical solutions and the analytical solutions ( $\omega = 30$ ;  $Z = 2 + i$ ,  $M_0 = 0$ ). Theoretical solution: odd ( $\times$ ) and even ( $+$ ) azimuthal mode. Numerical solution:  $\circ$ ; — :  $n=1$ ; - - - :  $n=2$ ; ..... :  $n=3$ ; - · - · - :  $n=4$ ; - - - - :  $n=5$ ; - - - :  $n=6$ ; - · - · - :  $n=7$ .

**Table 2**

Simplifications on the solution equation (9) imposed by the boundary conditions ( $A$  is an arbitrary complex amplitude).

| Configuration | Solution $p(r, \theta)$       | Parity of $m$ |
|---------------|-------------------------------|---------------|
| SS            | $AJ_m(Y_{m,n}r)\cos(m\theta)$ | Even          |
| SA            | $AJ_m(Y_{m,n}r)\sin(m\theta)$ | Odd           |
| AS            | $AJ_m(Y_{m,n}r)\cos(m\theta)$ | Odd           |
| AA            | $AJ_m(Y_{m,n}r)\sin(m\theta)$ | Even          |

When imposing the boundary conditions of the AA, AS, SA and SS configurations, the solution given by Eq. (9) is simplified. The simplifications are given in Table 2.

The 2D eigenfunctions obtained for an AA configuration correspond to phase-shifted SS eigenfunctions and therefore the eigenvalues of the AA and SS configurations are the same. For example, in Fig. 5 is plotted the real part of the pressure for the analytical mode (2,2). It may be seen as an SS mode regarding the thick dashed straight lines or it may be seen as an AA mode considering the straight solid lines. Similarly, eigenvalues obtained in the SA and AS configurations are identical and the eigenfunctions are just phase-shifted.

Consequently the axisymmetric azimuthal modes  $m=0$  correspond to SS modes, as expected, while even azimuthal modes correspond to both AA and SS modes and odd azimuthal modes correspond to both AS and SA modes.

A very good agreement between the numerical and analytical solutions is observed since for the eigenvalues plotted in Fig. 4 the relative error goes from  $1.1 \times 10^{-7}$  to  $1.8 \times 10^{-5}$ . The present approach with the corresponding developed stability code is thus validated for no flow.

## 4.2. Lined duct with splices

### 4.2.1. No flow case

Bi [3] calculated eigenmodes in a non-uniformly lined circular duct without flow. The calculations were conducted by means of the multimodal method: the solution was expanded in terms of eigenvectors of the rigid duct case. Among different configurations of non-uniformly lined duct, Bi considered the lined duct with two rigid splices diametrically opposed. The calculations were performed for  $\omega = 31.26$ ,  $Z = 2 + i$ ,  $M_0 = 0$  and  $\theta_s = 0.15$ . The nine least damped eigenmodes are given.

The same configuration has been calculated with the present numerical method, results have been presented in [21]. A good agreement on the eigenvalues is obtained considering the number of digits given by Bi and a qualitative good agreement on the shape of the eigenfunctions is found. Computations have been done on three meshes of 1194, 10 380, and 19 656 triangles, respectively numbered mesh one to three. The mesh convergence has been evaluated by considering the residuals (i.e. the relative change in the value of a wavenumber between two computations) for the nine wavenumbers given by Bi. The largest residual found by comparing the wavenumbers obtained with mesh one and mesh two is  $3.87 \times 10^{-6}$  and  $9.57 \times 10^{-6}$  when comparing the eigenvalues obtained on mesh two and mesh tree. Considering the precision imposed on the Krylov–Schur computation, these results show that convergence has been reached.

### 4.2.2. Flow case

Brambley et al. [6] proposed a method based on a Fourier series expansion for the computation on any geometry in the presence of axial sheared flows. In order to validate further the present method in the presence of flow, qualitative comparisons are done with spectra shown by Brambley et al. [6]. First a parabolic sheared flow defined in Eq. (10) is

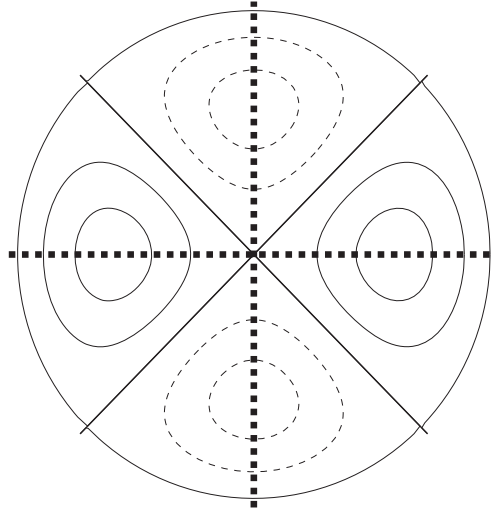


Fig. 5. Contours of  $\text{Re}(p)$  for the mode (2,2). Solid contours are positive, dashed contours are negative.

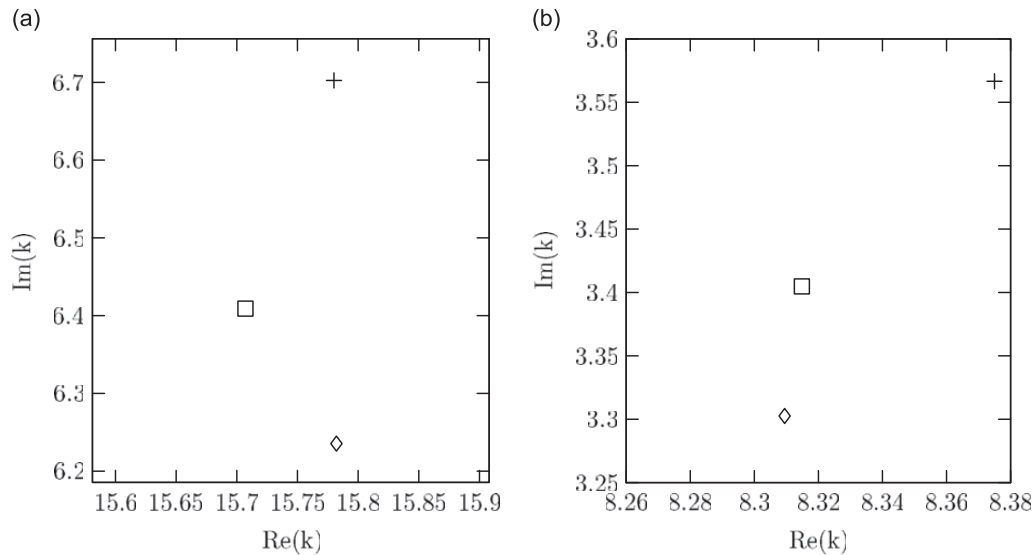


Fig. 6. Validation cases:  $\theta_s = 0.1$ ,  $\omega = 31$ ,  $Z = 2 + i$ ,  $M = 0.5$ : (a) Parabolic sheared flow defined by Eq. (10). (b) Thin sheared flow defined by Eq. (11) with  $\delta = 10^{-3}$ . +: Unspliced duct ( $\theta_s = 0$ );  $\square$ : SS mode;  $\diamond$ : AA mode.

considered:

$$\frac{M_0(r)}{M} = 1 - r^2 \quad (10)$$

Then the thin sheared boundary flow defined by Rienstra and Vilenski [22], see Eq. (11) is used:

$$\frac{M_0(r)}{M} = \tanh\left(\frac{1-r}{\delta}\right) + \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \left(\frac{1 + \tanh\left(\frac{1}{\delta}\right)r + 1 + r}{\delta}\right) (1-r) \quad (11)$$

In Fig. 6(a) and (b) are shown small regions of the spectra obtained with these two flows for  $\omega = 31$ ,  $\theta_s = 0.1$ ,  $Z = 2 + i$ ,  $M = 0.5$  and  $\delta = 10^{-3}$  as in Ref. [6]. Although being able to compute all the modes, Brambley et al. focused on the modes satisfying the condition  $p(1, \theta + \pi) = p(1, \theta)$  and therefore the calculations for the spliced duct have been conducted for the AA and SS modes only. A qualitative good agreement is obtained with [6, Fig. 13(b) and Fig. 12(c)], which correspond to an azimuthal order  $m = 24$  for the unspliced mode.

Results presented in this section have shown that the developed numerical method is suitable for the computation of acoustic modes on any geometric configuration with any arbitrary sheared mean flow. In the next section, the ability of the method to compute robustly the different components of the perturbation vector in the vicinity of the lining discontinuities will be addressed.

### 4.3. Convergence properties

In this section is presented a mesh convergence analysis as performed in [21]. Computations have been performed without flow on a rectangular rigid duct of height  $H$  (the length of reference) and of width  $L=AH$  ( $A$  is the aspect ratio) with  $\omega = \omega^*H/a_0 = 2.35$  ( $\omega^*$  is the dimensional angular frequency). The geometry is meshed by repeating the mesh pattern represented in Fig. 7. Two meshes have been generated: the first one is defined by  $\Delta x = \Delta y = L/50$  and the second one is constructed with  $\Delta x = \Delta y = L/75$ .

For this trivial configuration, the analytical solution for a mode  $(m,n)$  exhibiting  $m/2$  wavelengths along  $y$  and  $n/2$  wavelengths along  $x$  is given by  $k_a = \pm \sqrt{\omega^2 - (n\pi A)^2 - (m\pi)^2}$ . The relative error on the eigenvalues, defined as  $|k - k_a|/|k_a|$ , is computed for modes  $(m,0)$  (respectively for modes  $(0,n)$ ) and plotted against  $\lambda/h = \lambda_y/\Delta y = 2H/(m\Delta y)$  (respectively against  $\lambda/h = \lambda_x/\Delta x = 2L/(n\Delta x)$ ) in Fig. 8. The relative error goes from  $4.04 \times 10^{-12}$  for  $\lambda/h = 150$  to  $3.18 \times 10^{-4}$  for  $\lambda/h = 5.6$  and a fifth-order rate of convergence is observed.

For spliced geometry studies in this paper, an unstructured mesh with local refinement is considered (see Fig. 9). The mesh generator GMSH is used [23], the refinement is achieved by defining an attractor point at the lining discontinuity. In practice, the mesh used in the uniformly lined case is reused and the attractor point is defined such as there are 20 elements on the spliced area. The mesh is then refined until mesh convergence is observed on the eigenvalues. The refinement strategy could be optimised by implementing an *a posteriori* error estimation for local mesh adaptivity [8].

In Fig. 10 is plotted the computation time as a function of the size  $N$  of the matrices (if  $N_T$  is the number of triangles in the mesh then  $N = 24N_T$ ). Serial computations have been performed on an Intel Xeon Woodcrest 5160. Displayed times correspond to computations performed with or without flow and in spliced or unspliced configuration. In these computations, where the maximum dimension of the subspace in the Krylov–Schur method is 80, between 30 and 80 eigenvalues are found.  $O(N^2)$  time complexity is observed. Shift-invert spectral transformation in the Krylov–Schur method requires to solve a linear system at each iteration. This is done by means of a direct solving (sparse LU factorisation). Computations could be speeded up by using an iterative solver together with an appropriate preconditioner and parallel computing.

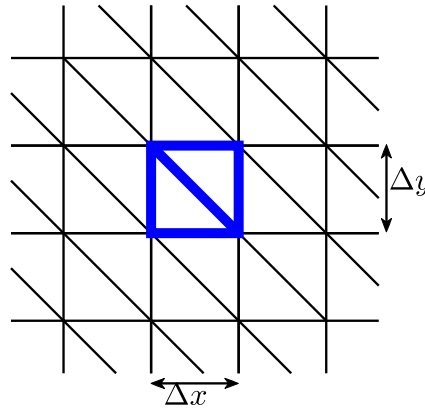


Fig. 7. Mesh pattern used for the mesh convergence analysis.

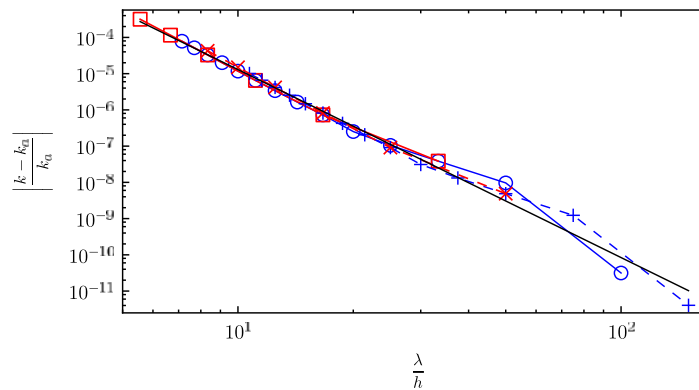
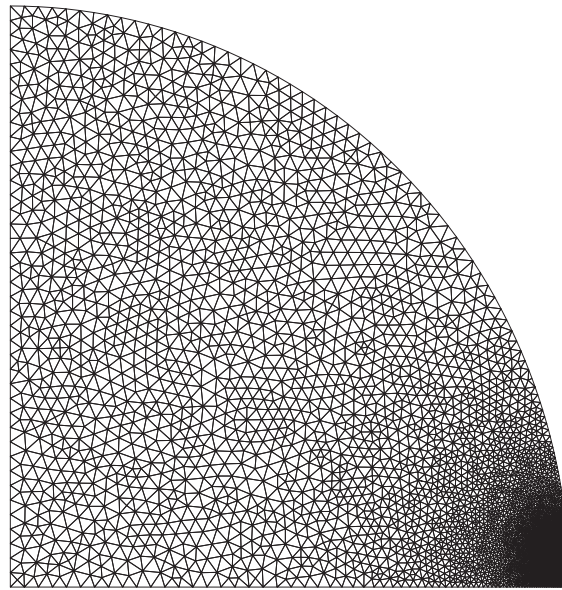
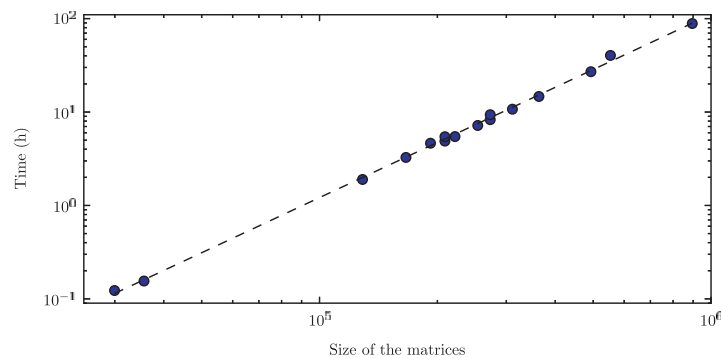


Fig. 8. Effect of the mesh resolution on the accuracy—relative error on the eigenvalues  $|k - k_a|/k_a$  against  $\lambda/h$ . —○—: mesh #1, modes  $(0,n)$ ; —+—: mesh #2, modes  $(0,n)$ ; —□—: mesh #1, modes  $(m,0)$ ; —×—: mesh #2, modes  $(m,0)$ ; —:  $|k - k_a|/k_a \sim (\lambda/h)^{-5.19}$ .



**Fig. 9.** Example of unstructured mesh refined at the liner-splice discontinuity.



**Fig. 10.** Speed of convergence: computation time  $T$  as a function of the size of the matrices  $N$  (●: Computation time; - - - -:  $T \sim N^{1.96}$ ).

## 5. Investigation of discontinuity effects

In the following, the splice width is fixed such as  $\theta_s = 0.05$  (i.e. the unlined section represents 3.18 percent of the duct circumference),  $\omega = 30$  and  $Z = 2 + i$ , as chosen in [6, Section 6.5] when studying localised modes and in Section 4.1 when studying the unspliced case. In all sections but Sections 5.3 and 5.5, no mean-flow is considered ( $M_0 \equiv 0$ ). Calculations have been performed for the SS, AA, AS and SA cases.

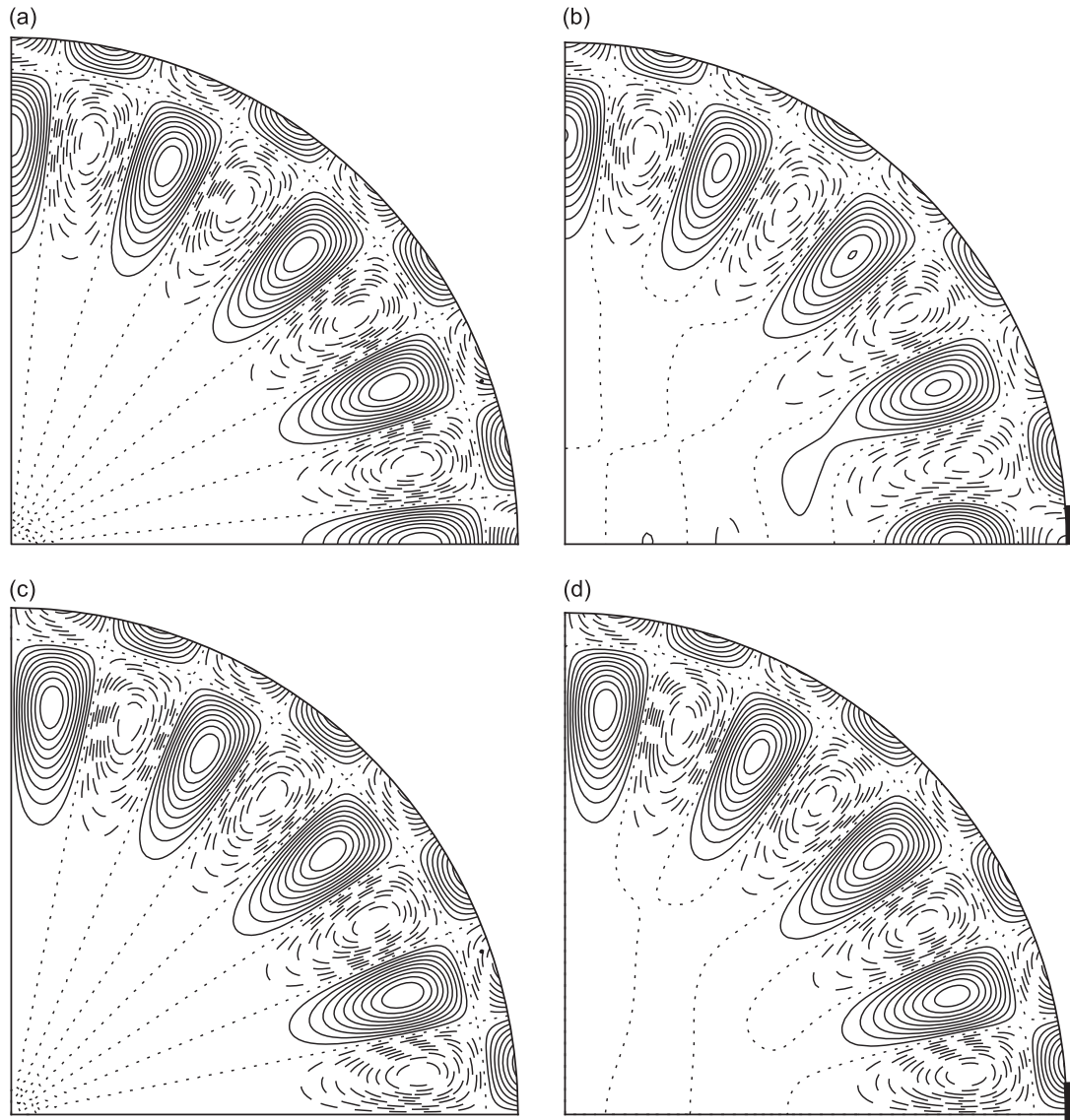
### 5.1. Shape of the eigenfunctions especially at the wall

In this section, the spliced eigenfunctions are analysed. In particular, the behaviour of the eigenfunctions associated to the spliced modes originating as the unspliced mode ( $m = 16, n = 2$ ) is investigated. The azimuthal wavenumber  $m$  being even, these modes are AA and SS modes. The corresponding unspliced eigenvalue is  $k = 19.92 + 1.17i$  and the spliced eigenvalues are  $k_{AA} = 19.89 + 1.17i$  and  $k_{SS} = 19.85 + 1.11i$ .

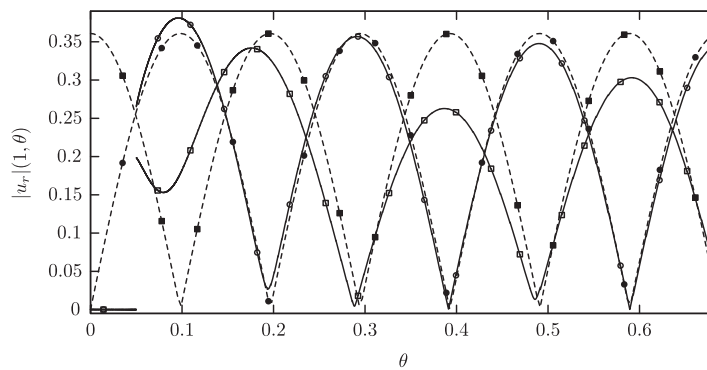
Eigenfunctions  $\text{Re}(p)$  of the unspliced mode (16,2) and of its corresponding AA and SS spliced modes are shown in Fig. 11. The SS eigenfunction shows more discrepancies with the unspliced mode than the AA eigenfunction especially near the splice.

Fig. 12 shows the absolute value of the radial velocity component at the wall for the modes SS and AA originating as the unspliced mode (16,2). The whole interval  $\theta \in [0, \pi/2]$  has not been plotted, since the effects of the splice are mainly noticeable for small  $\theta$ . Except at the splice, the radial velocity of the AA mode is in rather good agreement with the unspliced exact solution, while for small  $\theta$  even qualitatively the radial velocity of the SS mode is not comparable with the analytical unspliced solution.

Figs. 13 and 14 are equivalent to Fig. 12 but for the pressure and the azimuthal velocity component respectively. As far as the pressure is concerned, on the lined section  $\theta \in [\theta_s, \pi/2]$ , the conclusions are similar to those reported for the radial velocity component owing to the impedance boundary condition  $Zu_r = p$ . Moreover, the pressure eigenfunction of the AA



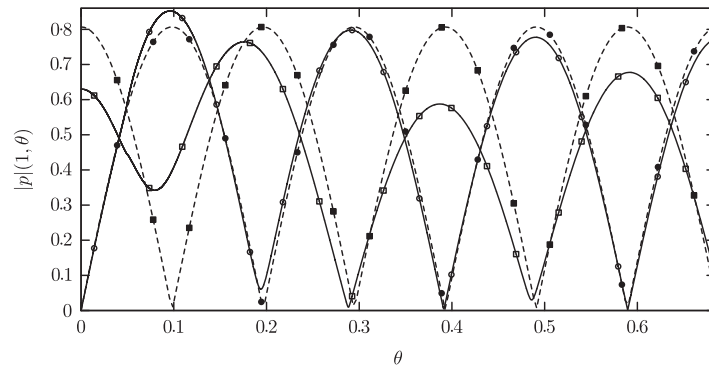
**Fig. 11.** Contours of  $\text{Re}(p)$  for the unspliced mode (16,2) (a), (c) and for its corresponding spliced SS mode (b) and AA mode (d). The splice is represented by the thick line ( $\theta_s = 0.05$ ). Contours are spaced at  $\{0.1, 0.2, \dots, 0.9\} \times \max|p|$ , solid contours are positive, dashed contours are negative and dotted contours are zero-contours.



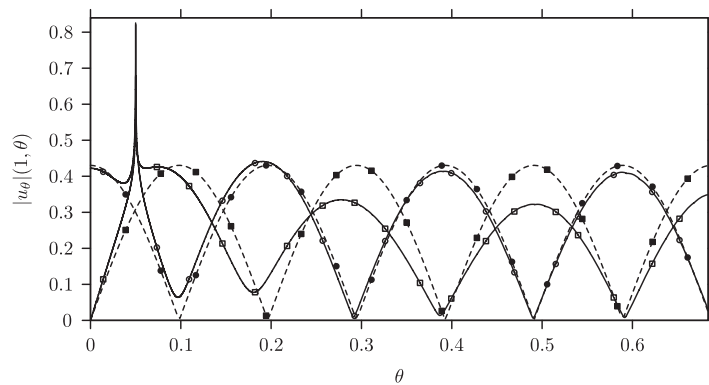
**Fig. 12.** Absolute value of the radial velocity component at the duct wall  $|u_r|(1, \theta)$  for the modes SS ( $-\square-$ ) and AA ( $-\circ-$ ) originating as the unspliced mode (16,2) ( $-\blacksquare-$ ) and ( $-\bullet-$ ). The rigid splice is located between  $\theta = 0$  and  $\theta = \theta_s = 0.05$ .

mode is in rather good agreement with the unspliced solution even at the splice. Regarding the azimuthal velocity component, it presents a peak at the impedance discontinuity. Except on and near the splice, the conclusions are similar to those on the radial velocity component and on the pressure component when comparing the AA and SS solutions with the





**Fig. 13.** Absolute value of the azimuthal velocity component at the duct boundary for the modes SS (—□—) and AA (—○—) originating as the unspliced mode (16,2) (—■—) and (—●—). The rigid splice is located between  $\theta = 0$  and  $\theta = \theta_s = 0.05$ .



**Fig. 14.** Absolute value of the pressure at the duct boundary for the modes SS (—□—) and AA (—○—) originating as the unspliced mode (16,2) (—■—) and (—●—). The rigid splice is located between  $\theta = 0$  and  $\theta = \theta_s = 0.05$ .

exact solution. Refining the mesh at the lining discontinuity leads to higher peaks both for the AA and SS modes, leading us to believe that the azimuthal velocity is tending towards infinity at the wall impedance jump.

## 5.2. Discussion about singularities

Figs. 12 and 14 show that  $u_r(1, \theta)$  is discontinuous at  $\theta = \theta_s$  and  $u_\theta(1, \theta)$  seems to tend towards infinity as  $\theta$  tends towards  $\theta_s$ . Although no complete analytical study is possible to characterise the solution at the boundaries, a few results may be found analytically.

The most straightforward analytical investigation concerns the radial acoustic velocity component. At the joint between the rigid splice and the liner, the boundary condition written in cylindrical coordinates is jumping from  $u_r(1, \theta_s^-) = 0$  to  $u_r(1, \theta_s^+)Z = p(1, \theta_s^+)$ , which explains the discontinuity on the radial velocity noticeable in Fig. 12.

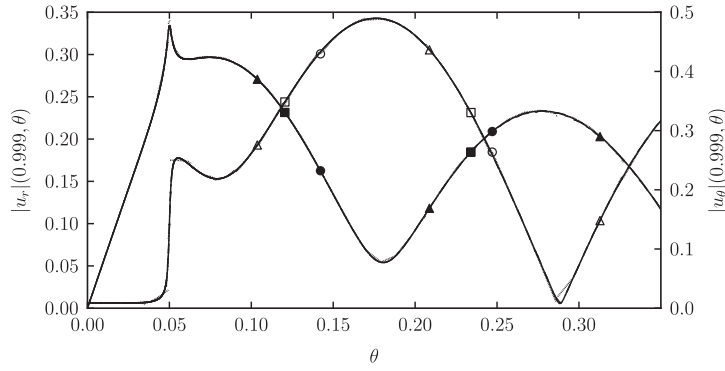
As far as the azimuthal acoustic velocity component is concerned, combining the momentum equations in cylindrical coordinates on  $\mathbf{e}_\theta$  and on  $\mathbf{e}_r$  yields

$$\partial_r(r u_\theta) = \partial_\theta u_r \quad (12)$$

Radial component  $u_r$  being discontinuous at the hard–soft wall transition, singular properties are expected on  $\partial_r(r u_\theta)$  at this position. Although it is not possible to conclude directly on  $u_\theta$  from Eq. (12), it helps understanding the singular behaviour shown in Fig. 14.

Refining the mesh increases the peak on the azimuthal velocity at the hard–soft wall junction only. Moreover the singular behaviour on the eigenfunctions seems to take place at the wall impedance jump only. In Fig. 15 are plotted  $|u_r|$  and  $|u_\theta|$  at  $r = 0.999$  as functions of  $\theta$  for three different meshes. The first mesh is coarse (1484 triangles), the second one has 8711 triangles, the third mesh is much refined (37 294 triangles). It appears that for both the radial velocity component and the azimuthal velocity component, no singular behaviour is observed and no major discrepancies are noticeable between the results obtained with the different meshes.

It can be also shown that the jump on the radial velocity at  $\theta = \theta_s$  and  $r = 1$  (see Fig. 12) remains constant when refining the mesh. This shows the ability of the discontinuous Galerkin method to catch correctly the discontinuity on  $u_r$ . Actually, as long as the inner edges of the mesh are perpendicular to the domain boundary at the lining discontinuities, the jump in  $u_r$  does not lead to numerical problems. Indeed, as pointed out by Cockburn [24], it is obvious in Eq. (7) that the residual on an element depends strongly on the jump  $\phi^+ - \phi^-$ . More precisely, with or without flow, the integral of the residual on an



**Fig. 15.** Absolute value of the radial velocity component  $|u_r|$  (empty symbol) and of the azimuthal velocity component  $|u_\theta|$  (filled symbol) at  $r = 0.999$  as functions of  $\theta$ . The solid line with triangle markers corresponds to the mesh with 37 294 triangles, the dashed line with square markers corresponds to the mesh with 8711 triangles and the dotted line with circle markers correspond to the mesh with 1484 triangles.

element depends linearly on the integral on the bounding inner edges of the term:

$$[\mathbf{A}_j n_j]^-(\boldsymbol{\varphi}^+ - \boldsymbol{\varphi}^-) \cdot \boldsymbol{\psi}_m = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} n_x(\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}) - n_x(p^+ - p^-) \\ n_y(\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}) - n_y(p^+ - p^-) \\ 0 \\ -(\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}) + p^+ - p^- \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\psi}_m. \quad (13)$$

Hence, the local residual depends on the pressure and normal velocity jumps at the edges of the local element. If the lining discontinuity point corresponds to the end point of an internal edge between two triangles and if this edge is perpendicular to the computational domain boundary  $\partial\Omega_h$ , then the velocities normal to this edge  $\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}$  and  $\mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}$  corresponds purely to  $u_\theta$ . The meshes used in the computations satisfy this condition and therefore, the local residuals on the two triangles bordered by this edge are not affected by the radial velocity jump but only by the azimuthal velocity and pressure jumps.

### 5.3. Symmetry conditions and discrepancies with the uniformly lined duct configuration

As seen in Section 5.1 in Figs. 11–14, the eigenfunction of the mode AA is in better agreement with the corresponding unspliced solution (mode (16,2)) than the eigenfunction of the mode SS. Brambley et al. [6] derived an asymptotic method to compute spliced eigenmodes for  $\theta_s \ll 1$ . They showed that for a mode of azimuthal order  $m$  the perturbation to Fourier modes of order  $n$  is  $O(\theta_s)$  for  $n \gg m$ . Moreover, for  $(m\theta_s) \ll 1$ , they have demonstrated that the unspliced wavenumber perturbation by the splice is  $O(\theta_s)$  for modes with  $\cos(m\theta)$  (i.e. AS and SS modes) dependence while it is  $O(\theta_s^3)$  for unspliced modes with  $\sin(m\theta)$  (i.e. AA and SA modes) dependence. This difference in spliced effect depending on the mode symmetry is illustrated in this section by considering the acoustic kinetic energy, first without flow. It is then shown that similar results are obtained with flow.

Consider the linearised Euler equations written in cylindrical coordinates with mean flow. The momentum equations on  $\mathbf{e}_r$ , on  $\mathbf{e}_\theta$  and on  $\mathbf{e}_z$  read respectively:

$$\begin{cases} i(kM_0 - \omega)u_r + \partial_r p = 0 & (a) \\ i(kM_0 - \omega)u_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta p = 0 & (b) \\ i(kM_0 - \omega)w + ikp + (\partial_r M_0)u_r = 0 & (c) \end{cases} \quad (14)$$

and the continuity equation is

$$i(kM_0 - \omega)p + \partial_r u_r + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta + ikw = 0 \quad (15)$$

Then, without flow ( $M_0 \equiv 0$ ), after some manipulation the acoustic kinetic energy on the computational domain can be expressed as

$$\begin{aligned} E = \int_{\Omega_h} (|u_r|^2 + |u_\theta|^2 + |w|^2) d\Omega &= \int_{\Omega_h} \left(1 + \frac{|k|^2 - k^2}{\omega^2}\right) |p|^2 d\Omega - \frac{i}{\omega} \left[ \int_0^1 u_\theta \bar{p} dr \right]_{\theta=\theta_s^-}^{\theta=\theta_s^+} + \frac{i}{\omega} \int_0^{\theta_s} u_r(1, \theta) \bar{p}(1, \theta) d\theta \\ &\quad + \frac{i}{\omega} \int_{\theta_s}^{\pi/2} u_r(1, \theta) \bar{p}(1, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

The overline represents the complex conjugate of the corresponding parameter.



The jump term in Eq. (16) equals zero. Indeed, it has been shown previously that the singular behaviour of the eigenfunctions is restricted to the wall location and so  $(u_\theta \bar{p})(r, \theta)$  is continuous at  $\theta = \theta_s$  and  $r$  such as  $0 \leq r < 1$ . Cancellation of this term has been checked numerically as well.

Using the impedance boundary condition in the spliced configuration, Eq. (16) becomes

$$E_{\text{spliced}} = \int_{\Omega_h} \left( 1 + \frac{|k|^2 - k^2}{\omega^2} \right) |p|^2 d\Omega + \frac{i}{Z\omega} \int_{\theta_s}^{\pi/2} |p|(1, \theta)^2 d\theta \quad (17)$$

Whereas in the unspliced (i.e. uniformly lined) duct configuration, it reads

$$E_{\text{uni}} = \int_{\Omega_h} \left( 1 + \frac{|k|^2 - k^2}{\omega^2} \right) |p|^2 d\Omega + \frac{i}{Z\omega} \int_{\theta_s}^{\pi/2} |p|(1, \theta)^2 d\theta + \frac{i}{Z\omega} \int_0^{\theta_s} |p|(1, \theta)^2 d\theta \quad (18)$$

If the pressure component of an unspliced mode satisfies an antisymmetry condition about the  $x$ -axis (AA or SA modes), the  $x$ -axis is a pressure node and in particular  $p(1, 0) = 0$ .  $p(1, \theta)$  remains small between  $\theta = 0$  and  $\theta = \theta_s$  providing  $(m\theta_s) \ll 1$ . Moreover, if  $\theta_s \ll 1$ , the last term of Eq. (18) corresponds to the integral of a small integrand on a small domain and may thus be neglected. It follows that the spliced and the unspliced eigenpairs  $(k, \mathbf{p})$  satisfy almost the same integral equation. As a consequence, we are likely to think that the spliced and unspliced solutions would exhibit few discrepancies. More precisely, Brambley et al. [6] showed that the perturbation to the unspliced eigenvalues is  $O(\theta_s^3)$ .

On the contrary, if a symmetry condition on the pressure component with respect to the  $x$ -axis is imposed, the  $x$ -axis is a pressure anti-node. As a consequence, under the assumptions  $\theta_s \ll 1$  and  $(m\theta_s) \ll 1$  only the domain of integration is small in the last integral term of the right-hand side of Eq. (18) and not the integrand. Brambley et al. [6] proved that the perturbation to the unspliced wavenumbers is then only  $O(\theta_s)$ .

With flow, the reasoning is similar. Manipulating Eqs. (14a)–(14c) and Eq. (15) yields

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega_h} i(\bar{k}M_0 - \omega)(|u_r|^2 + |u_\theta|^2 + |w|^2) d\Omega = & - \left[ \int_0^1 u_\theta \bar{p} dr \right]_{\theta=\theta_s^-}^{\theta=\theta_s^+} + \int_{\Omega_h} (i(kM_0 - \omega)|p|^2 + i(k - \bar{k})w\bar{p} + \partial_r(M_0)\bar{u}_r w) d\Omega \\ & + \int_0^{\theta_s} u_r(1, \theta)\bar{p}(1, \theta) d\theta + \int_{\theta_s}^{\pi/2} u_r(1, \theta)\bar{p}(1, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (19)$$

For the same reasons as without flow, the jump term equals zero. Introducing the impedance boundary conditions in the spliced configuration yields

$$I_{\text{spliced}} = \int_{\Omega_h} (i(kM_0 - \omega)|p|^2 + i(k - \bar{k})w\bar{p} + \partial_r(M_0)\bar{u}_r w) d\Omega + \frac{1}{Z} \int_{\theta_s}^{\pi/2} |p(1, \theta)|^2 d\theta \quad (20)$$

In the uniformly lined duct case, it reads

$$I_{\text{uni}} = \int_{\Omega_h} (i(kM_0 - \omega)|p|^2 + i(k - \bar{k})w\bar{p} + \partial_r(M_0)\bar{u}_r w) d\Omega + \frac{1}{Z} \int_{\theta_s}^{\pi/2} |p(1, \theta)|^2 d\theta + \frac{1}{Z} \int_0^{\theta_s} |p(1, \theta)|^2 d\theta \quad (21)$$

Eqs. (20) and (21) differ only over one integral term which is exactly the same as in the no flow case. The previous reasoning holds under the assumptions  $\theta_s \ll 1$  and  $(m\theta_s) \ll 1$ , illustrating the fact that, with or without flow, the effect of thin splices is more pronounced for modes symmetric about the splices than modes antisymmetric about them.

#### 5.4. Effects of the splices on the spectrum

As well as the modification of the eigenfunctions by the presence of the splice, the eigenvalues of the spliced modes are affected as well. Fig. 16 provides the spectrum obtained with the SS, AA, AS and SA computations. It seems to be characteristic of a spectrum with one or several localised modes (see [5, Fig. 3(e); 6, Fig. 14(a)]). As in the unspliced case the upper branch corresponds to surface waves and the lower branches correspond to acoustic modes, however, there are now two isolated modes in the middle. They are localised modes, originating as surface waves and turning into acoustic waves when  $\theta_s$  is increased. They correspond to AS and SS modes and they originate as unspliced surface waves of azimuthal order  $m=1$  and  $m=2$  respectively.

As far as the acoustic waves are concerned, the spectrum is similar to the spectrum obtained for the unspliced duct (see Section 4.1 and Fig. 4). In Fig. 17(a) is plotted a zoom on the acoustic waves spectrum. The unspliced  $(m, n)$  (see Section 4.1) even and odd modes eigenvalues are plotted and encircled together with their corresponding spliced modes eigenvalues. In the vicinity of an eigenvalue corresponding to an even (respectively odd) azimuthally unspliced mode lie both a SS and an AA spliced modes (respectively both a SA and an AS unspliced modes). However, on the contrary to the unspliced case, the eigenvalues obtained in the AA (respectively AS) configuration are not identical to the eigenvalues obtained in the SS (respectively SA) configuration, owing to the loss of axisymmetry. For  $m=0$  only a SS spliced mode lies in the neighbourhood of the eigenvalue.

Concerning the surface waves, the conclusions are similar for  $m \gtrsim 10$ . In Fig. 17(b) is plotted a zoom on the part of the spectrum associated to surface waves. However, for low azimuthal order, the AA (respectively SA) modes are in the vicinity

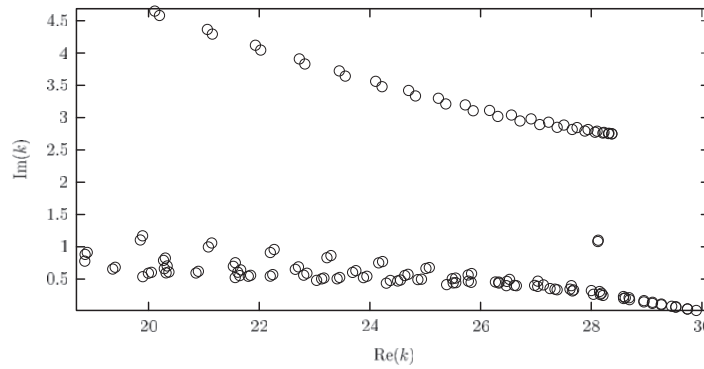


Fig. 16. Spectrum obtained for  $\theta_s = 0.05$ ,  $M_0 = 0$ ,  $\omega = 30$  and  $Z = 2 + i$ .

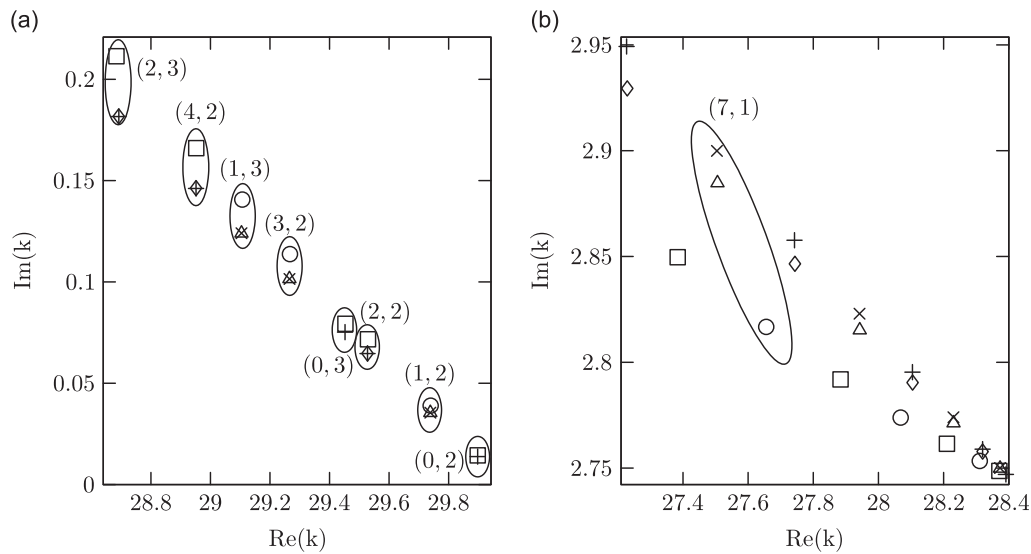


Fig. 17. Spectrum obtained for  $\theta_s = 0.05$ ,  $M_0 = 0$ ,  $\omega = 30$  and  $Z = 2 + i$ : Zoom in on the right parts of the acoustic waves branches (a) and of the surface waves branch (b) ( $\square$ : SS mode;  $\diamond$ : AA mode;  $\circ$ : AS mode;  $\triangle$ : SA mode). Comparison with the odd ( $\times$ ) and even ( $+$ ) unspliced modes.

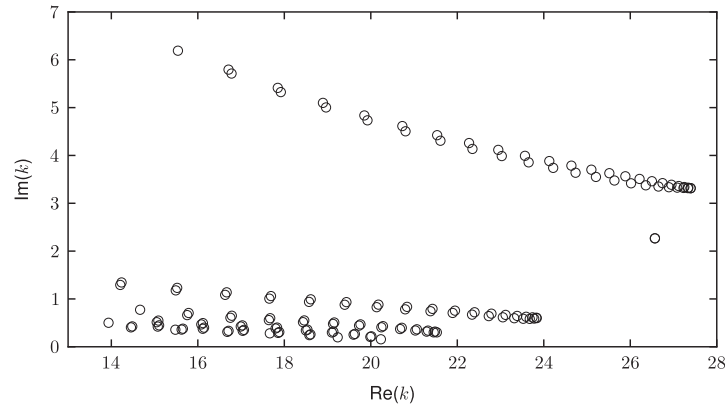
of unspliced even (respectively odd) modes but the SS (respectively AS) modes are not in the close neighbourhood. The SS and AS eigenvalues are shifted to the right as they are scattered into modes of lower azimuthal orders. For example, the unspliced mode  $m=7$  is located at  $k \approx 27.5 + 2.90i$ , the corresponding SA mode is located at  $k \approx 27.5 + 2.88i$  and the associated AS mode is located at  $k \approx 27.7 + 2.82i$ . Moreover, since two modes turned into localised modes, the SS mode corresponding to the unspliced surface mode  $m=2$  and the AS mode associated to the unspliced surface mode  $m=1$  are missing.

It has been shown in the previous section that if  $(m\theta_s) \ll 1$  and  $\theta_s \ll 1$ , the eigenvalues of the modes satisfying an antisymmetry condition with respect to the  $x$ -axis are less modified by the splice than the eigenvalues of the modes satisfying a symmetry condition. Correspondingly, a AA (respectively SA) eigenvalue is closer to its equivalent unspliced theoretical even (respectively odd) wavenumber than the corresponding SS eigenvalue (respectively AS wavenumber). This may be observed in Fig. 17(a) and (b) for both acoustic modes and surface waves.

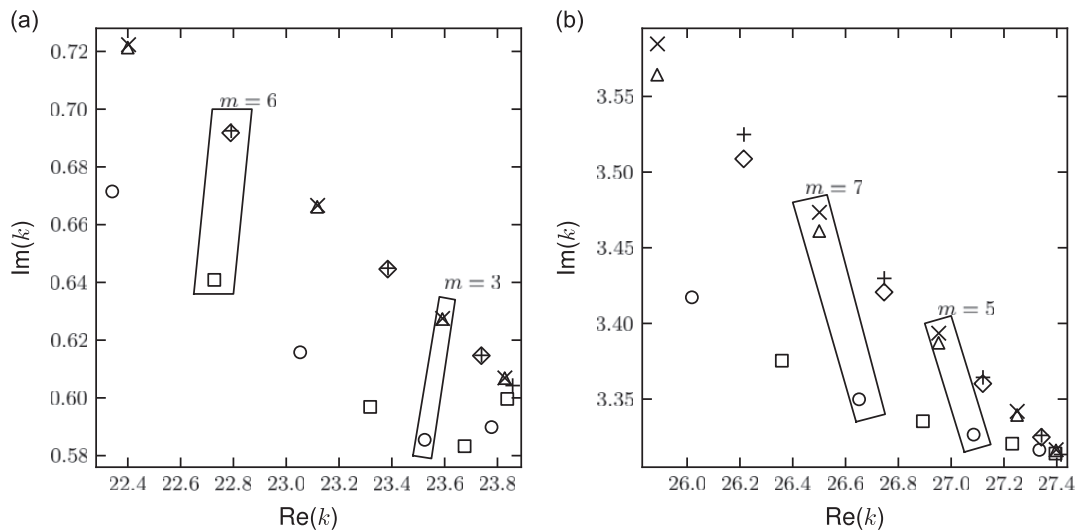
As far as the spatial growth rate is concerned, the surface modes in the presence of splices are less damped than their corresponding unspliced modes, owing to a smaller acoustically treated surface (see Fig. 17(b)). However, for acoustic modes, this is not true for all the modes. It seems that at low azimuthal order, the acoustic modes are more damped in the spliced case (see Fig. 17(a)) in spite of a smaller lined surface.

### 5.5. Presence of a parabolic sheared flow

In this section, the previous configuration ( $\theta_s = 0.05$ ,  $\omega = 30$ ,  $Z = 2 + i$ ) is kept but now with a parabolic sheared flow defined by Eq. (10) with  $M = 0.5$ . In Fig. 18 are plotted the eigenvalues obtained with SS, AA, AS and SA computations. As for the no-flow case, there is a surface waves branch and two localised modes in addition to the least damped modes corresponding to acoustic modes and divided on different branches, depending on their radial order. Compared to the no-flow case (see Fig. 16) where the acoustic branches are almost superimposed, they are now well separated. Moreover,



**Fig. 18.** Spectrum obtained for a parabolic sheared flow (defined by Eq. (10)) with  $M=0.5$ ,  $\theta_s = 0.05$ ,  $\omega = 30$ ,  $Z=2+i$ .



**Fig. 19.** Spectrum obtained for a parabolic sheared flow (defined by Eq. (10)) with  $M=0.5$ ,  $\theta_s = 0.05$ ,  $\omega = 30$  and  $Z=2+i$ : Zoom in on the right parts of the acoustic waves branches (a) and of the surface waves branch (b) ( $\square$ : SS mode;  $\diamond$ : AA mode;  $\circ$ : AS mode;  $\triangle$ : SA mode). Comparison with the odd ( $\times$ ) and even ( $+$ ) unspliced modes.

the mean flow being a sheared flow, there is as well a continuous spectrum. The latter is not studied in this paper and not shown in Fig. 18.

In this case, the unspliced solution may not be found analytically and so the unspliced modes are computed with the method presented in this paper, although a unidimensional method would have been sufficient (the problem is axisymmetric). For the unspliced configuration, computations have been made for the SS and AS boundary conditions to obtain both the even and odd azimuthal modes. In Fig. 19(a) is shown a zoom on the right part of the first acoustic branch and in Fig. 19(b) is plotted a zoom in the right part of the surface waves branch. On both figures are shown the unspliced odd and even modes and two of them are enclosed together with their corresponding spliced mode eigenvalues. The results are similar to the no-flow case: near an azimuthally even (respectively odd) unspliced mode lie an AA mode (respectively an SA mode). In the present configuration, the eigenvalues of the acoustic modes presenting a symmetry property on the pressure with respect to  $x$ -axis (AS and SS modes) are more affected by the splice than in Section 5.4 even though the splice width  $\theta_s$  is the same. Moreover, in the presence of a parabolic sheared flow profile and for the chosen parameters, all spliced modes (even acoustic modes) are less damped than their unspliced equivalents, which was not the case without flow, see Section 5.4.

Without flow (see Fig. 16) the eigenvalue corresponding to the localised SS mode was quite close to the eigenvalue associated with the localised AS mode: the relative deviation was  $7.5 \times 10^{-4}$ . With flow, the relative deviation is only  $7.5 \times 10^{-7}$ .

## 6. Computations on other geometries

In order to demonstrate the flexibility of the method, computations with flow in ducts of different geometries and with lining discontinuities are presented in this section. First computations are performed on a flow duct of elliptic cross-

section (Fig. 20(a)) and then on a flow duct of square cross-section (Fig. 20(b)). Thanks to the symmetry properties, computations are performed on the upper-right quarter of each domain ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$  or  $x > 0$  and  $y > 0$ ). As in the previous section, abbreviations SS, SA, AS, AA are used to designate the computations according to the symmetry properties imposed on the boundaries of the computational domain (see Table 1).

For both geometries, meshes have been refined until mesh convergence. They are shown in Fig. 21(a) and (b).

### 6.1. Duct of elliptic cross-section

For ground clearance reasons, large aero-engines may be “flattened”. Therefore, the understanding of sound propagation in a duct of elliptic cross-section is of particular interest [25–27]. The considered elliptic duct geometry is depicted in Fig. 20. The semi-major axis is  $R$  and the semi-minor axis is  $\alpha R$  with  $\alpha = \frac{4}{5}$ . Two splices are located around  $\theta = 0$  and  $\theta = \pi$  and are  $2\theta_s$  wide. A Poiseuille flow defined by Eq. (22) is running through the duct [28]. For both flows defined by Eqs. (10) and (22), the mean Mach number is  $M_v = M/2$ .

$$\frac{M_0(x,y)}{M} = 1 - x^2 - \frac{y^2}{\alpha^2} \quad (22)$$

Parameters chosen in Section 5.5 for the study of the effects of a parabolic sheared flow are kept ( $\theta_s = 0.05$ ,  $\omega = 30$ ,  $Z = 2 + i$  and  $M = 0.5$ , the reference length is  $R$ ). The wavenumbers obtained with SS, AA, AS and SA computations are plotted in Fig. 22. The spectrum is quite similar to the spectrum obtained in a circular duct carrying a parabolic flow (see Fig. 18). It contains eigenvalues corresponding to surfaces modes, acoustic modes and localised modes, almost at the same position as

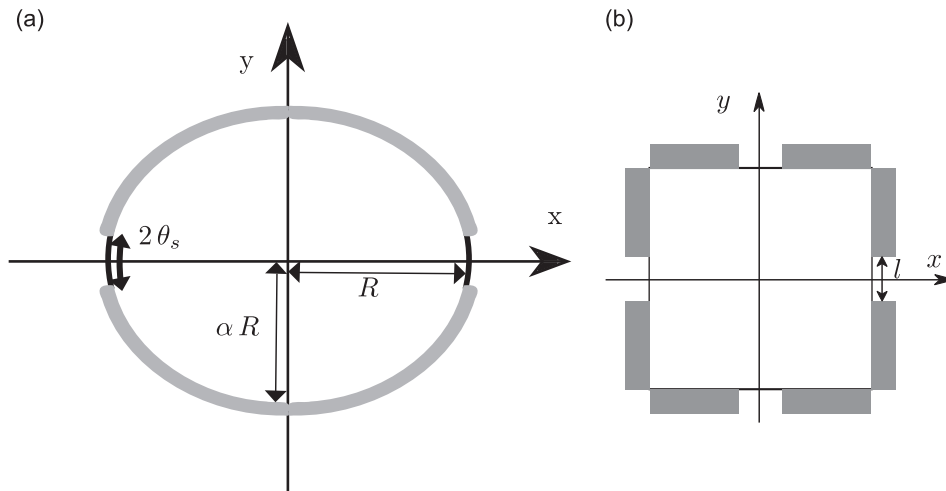


Fig. 20. Ducts with elliptic (a) and square (b) cross-section (lined walls are represented by wide grey lines).

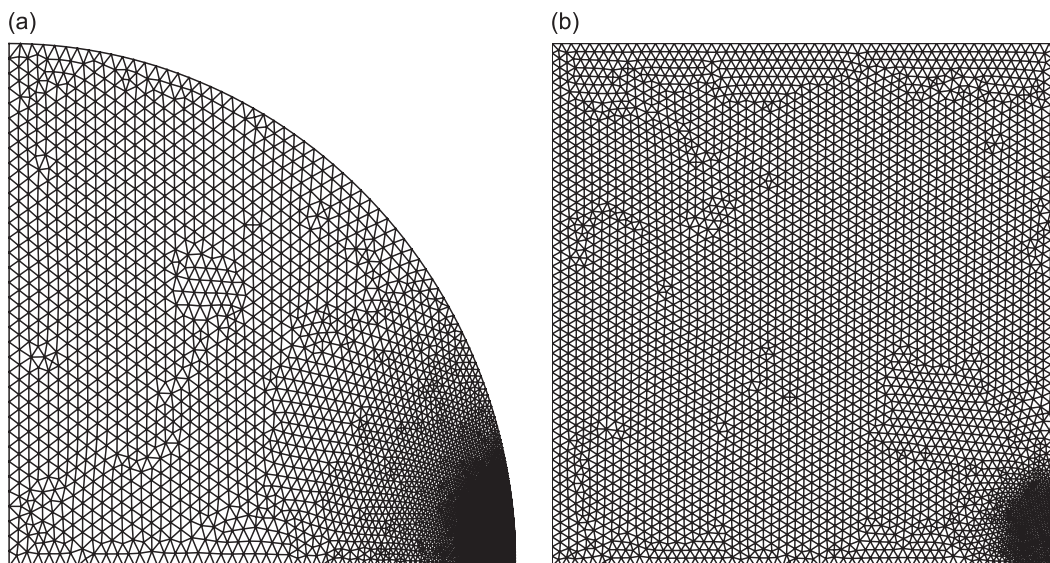


Fig. 21. Meshes used for the computations on the ducts with elliptic cross-section (a) and square cross-section (b).

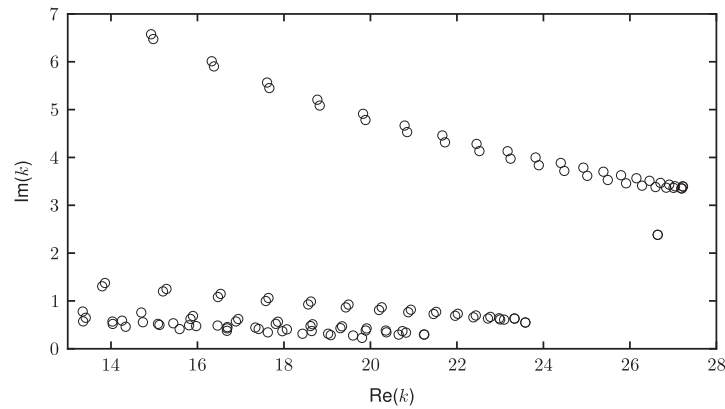


Fig. 22. Spectrum obtained for a Poiseuille flow (defined by Eq. (22)) in an elliptical duct with  $M=0.5$ ,  $\theta_s=0.05$ ,  $\omega=30$ ,  $Z=2+i$ .

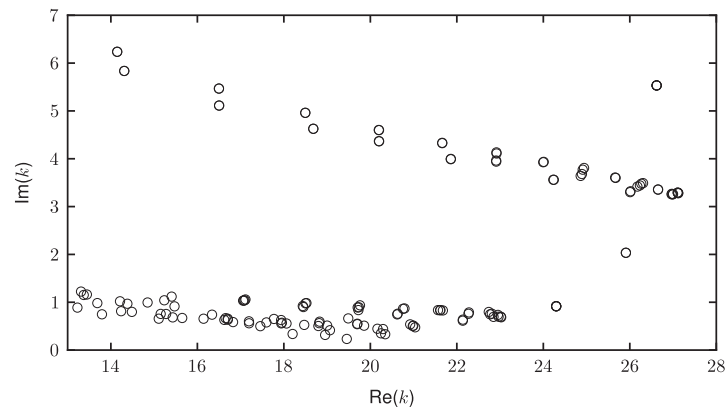


Fig. 23. Spectrum obtained for a Poiseuille flow running through a square duct partially lined with  $\omega=30$ ,  $Z=2+i$  and a mean Mach number  $M_v=0.25$ .

in the circular duct case. The relative derivation between the localised SS eigenvalue and the localised AS eigenvalue is  $1.9 \times 10^{-6}$ , slightly greater than in the circular duct case.

## 6.2. Duct of square cross-section

In this section is considered the modal analysis in a duct of square cross-section. The walls are lined except in the vicinities of the point  $(L/2,0)$  and  $(-L/2,0)$  where  $L$  is the side length and  $(0,0)$  is the square center, see Fig 20(b). The unlined areas  $2l$  represent 3.18 percent of the cross-section perimeter, as in the spliced circular duct case. The square side length  $L$  has been chosen so that the area of the cross-section is the same as the area of the circle of radius  $R$  previously studied:  $L = \sqrt{\pi R}$ . The previous parameters are kept  $\omega=30$ ,  $Z=2+i$ ,  $R$  is the reference length. A Poiseuille flow computed numerically by means of collocation method [29] is imposed such as the mean Mach number is 0.25.

In Fig. 23 are shown the eigenvalues resulting from SS, SA, AS and AA computations. The spectrum is rather similar to the spectra obtained for a circular duct and for a duct of elliptical cross-section: the modes may be classified as acoustic modes, surface modes or localised modes. There are both an SS localised mode and an AS localised mode lying about  $k=25.90 + 2.03i$ , the relative derivation between both wavenumbers being  $8.4 \times 10^{-9}$ , much smaller than for the circular and elliptical cases. The two eigenvalues lying around  $k \approx 24.3 + i$  and  $k \approx 26.6 + 5.54i$  correspond to modes that exist in the unspliced configuration as well.

## 7. Conclusion

In this paper, we derived a discontinuous Galerkin method for the computation of acoustic modes in a lined flow duct. The formulation is suitable for arbitrary axial sheared flow on any geometries since unstructured meshes may be used. Moreover, the method may be easily extended to more complex flows, for example with a swirl component or with a density gradient, by simply adding terms in the matrices  $\mathbf{A}_x$ ,  $\mathbf{A}_y$ ,  $\mathbf{B}$  of the linearised Euler equations (Eq. (1)). All the configurations analysed in this paper present symmetry properties with respect to the  $x$ - and  $y$ -axes. Therefore, to reduce the numerical costs, the computations have been performed on a quarter of domain by imposing successively symmetry and anti-symmetry boundary conditions on the resulting boundaries.

The no-flow case of an infinite uniformly lined duct has first been considered for validation purpose given that acoustic and surface waves may be computed analytically for this problem [20]. Good agreements have been observed and



the symmetry or antisymmetry properties of the eigenfunctions have been related to the parity of the azimuthal wavenumber  $m$ .

The method has then been employed to compute acoustic modes in infinite lined ducts with rigid splices. Satisfactory comparisons have been obtained with results given in Ref. [3] for the no-flow case and with results given in Ref. [6] for sheared flows with parabolic boundary layer profile or thin boundary layer profile with parameters representative of an engine intake. Numerical performances of the method have been evaluated by analysing the influence of the mesh refinement on the accuracy and by studying the speed of convergence of the method.

Finally, a thorough investigation of a small splice effect has been conducted by taking the same parameters as when studying the uniformly lined case. The discontinuous Galerkin method presents a robust behaviour in the vicinity of the lining discontinuities and gives an insight into the behaviour of the eigenfunctions at the joint between the splice and the lining. It turns out that the pressure, which is the only component of the acoustic perturbation involved in the previous studies on lining discontinuities in a duct (through the Pridmore-Brown equation), although being much more regular than the radial and azimuthal velocity components of the perturbation, has an infinite azimuthal derivative at the hard-soft wall transition. This singularity on the acoustic pressure azimuthal derivative is related to the infinite behaviour on the azimuthal velocity component at this position. Finally, the radial velocity component presents a finite jump.

For small splices ( $\theta_s \ll 1$ ) and for  $(m\theta_s) \ll 1$ , Brambley et al. [6] have proved that the magnitude of the unspliced wavenumber perturbation induced by the splice is  $O(\theta_s)$  for modes satisfying a symmetry condition about the  $x$ -axis while it is  $O(\theta_s^2)$  for modes satisfying an antisymmetry condition. This was illustrated in this paper by deriving an integral formulation of the linearised Euler equations. The effect of the imposed symmetry conditions on the spliced-induced perturbation to the unspliced eigenmodes has been observed numerically as well, by comparing spliced and unspliced eigenfunctions of the mode ( $m=16, n=2$ ) as well as spliced and unspliced spectra. As found by Bi et al. [5] and Brambley et al. [6], it was noticed that all the modal solutions have an unspliced equivalent although the method employed in this paper is completely different. Finally, the flexibility of the method was demonstrated by computing the eigenmodes in spliced ducts of cylindrical, square and elliptical cross-sections with a sheared Poiseuille flow.

## Acknowledgements

Lucas Pascal's PhD work is funded by the "Direction Générale de l'Armement" (DGA) which is gratefully acknowledged. Christophe Peyret and Philippe Delorme from Onera (DSNA) are gratefully acknowledged for providing an early version of the CAA solver *SPACE* as well as Julien Primus from Onera (DMAE) for fruitful discussions.

## References

- [1] G.W. Bielak, J.W. Premo, A.S. Hersh, Advanced Turbofan Duct Liner Concepts, Technical Report, NASA Langley, 1999.
- [2] M. Wright, Hybrid analytical/numerical method for mode scattering in azimuthally non-uniform ducts, *Journal of Sound and Vibration* 292 (3–5) (2006) 583–594.
- [3] W. Bi, Calculations of modes in circumferentially nonuniform lined ducts, *Journal of the Acoustical Society of America* 123 (5) (2008) 2603–2612.
- [4] G. Gabard, R. Astley, A computational mode-matching approach for sound propagation in three-dimensional ducts with flow, *Journal of Sound and Vibration* 315 (4–5) (2008) 1103–1124.
- [5] W. Bi, V. Pagneux, D. Lafarge, Y. Aurégan, Trapped modes at acoustically rigid splices, *AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference 2009-3105*, AIAA, Miami, FL, 2009.
- [6] E.J. Brambley, A.M.J. Davis, N. Peake, Eigenmodes of lined flow ducts with rigid splices, *Journal of Fluid Mechanics* 690 (2012) 399–425.
- [7] P. Mustafi, J. Astley, R. Sugimoto, A computational study of the effects of liner damage on zero-splice turbofan intake liners, *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2012.
- [8] A. Cliffe, E. Hall, P. Houston, Adaptive discontinuous Galerkin methods for eigenvalue problems arising in incompressible fluid flows, *SIAM Journal on Scientific Computing* 31 (6) (2009) 4607–4632.
- [9] P. Delorme, P. Mazet, C. Peyret, Y. Ventribout, Computational aeroacoustics applications based on a discontinuous Galerkin method, *Comptes Rendus Mécanique* 333 (9) (2005) 676–682.
- [10] W. Bi, V. Pagneux, D. Lafarge, Y. Aurégan, Modelling of sound propagation in a non-uniform lined duct using a multi-modal propagation method, *Journal of Sound and Vibration* 289 (4–5) (2006) 1091–1111.
- [11] S.W. Rienstra, Acoustic scattering at a hardsoft lining transition in a flow duct, *Journal of Engineering Mathematics* 59 (2007) 451–475.
- [12] E.J. Brambley, Low-frequency acoustic reflection at a hardsoft lining transition in a cylindrical duct with uniform flow, *Journal of Engineering Mathematics* 65 (2009) 345–354.
- [13] K. Ingard, Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reflection, absorption, and transmission, *Journal of the Acoustical Society of America* 31 (7) (1959) 1035–1036.
- [14] M. Myers, On the acoustic boundary condition in the presence of flow, *Journal of Sound and Vibration* 71 (3) (1980) 429–434.
- [15] E.J. Brambley, Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings, *Journal of Sound and Vibration* 322 (2009) 1026–1037.
- [16] E. Brambley, A well-posed boundary condition for acoustic linings in straight ducts with flow, *AIAA Journal* 49 (6) (2011) 1272–1282.
- [17] J.S. Hesthaven, T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*, 1st edn. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
- [18] H.L. Atkins, Continued Development of the Discontinuous Galerkin Method for Computational Aeroacoustic Applications, *Computational Aeroacoustic Applications*, AIAA Paper, 97-1581, 1997.
- [19] V. Hernandez, J.E. Roman, V. Vidal, SLEPc: a scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems, *ACM Transactions on Mathematical Software* 31 (3) (2005) 351–362.
- [20] S.W. Rienstra, A classification of duct modes based on surface waves, *Wave Motion* 37 (2) (2003) 119–135. ISSN 0165-2125.
- [21] L. Pascal, E. Piot, G. Casalis, Discontinuous Galerkin method for acoustic modes computation in lined ducts, *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Colorado Springs, USA, 2012.

- [22] S.W. Rienstra, G.G. Vilenski, Spatial instability of boundary layer along impedance wall, *AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference 2008-2932*, Vancouver, Canada, 2008.
- [23] C. Geuzaine, J.-F. Remacle, Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (11) (2009) 1309–1331.
- [24] B. Cockburn, Discontinuous Galerkin methods, *ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 83 (11) (2003) 731–754.
- [25] N. Peake, A.J. Cooper, Acoustic propagation in ducts with slowly varying elliptic cross-section, *Journal of Sound and Vibration* 243 (3) (2001) 381–401.
- [26] J.M.G.S. Oliveira, P.J.S. Gil, Propagation of sound in ducts with elliptical cross-section and lined walls, *39th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering: Inter-Noise 2010*, SPA, 2010.
- [27] M. Willatzen, L.C. Lew Yan Voon, Flow-acoustic properties of elliptic-cylinder waveguides and enclosures, *Journal of Physics: Conference Series* 52 (2006) 1–13.
- [28] T.C. Papanastasiou, G.C. Georgiou, A.N. Alexandrou, *Viscous Fluid Flow*, CRC Press, 1999.
- [29] R. Peyret, *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flows*, Springer Verlag, Heidelberg, 2002.

## 5.2 Complément à l'article : effet de l'angle du maillage à la rupture

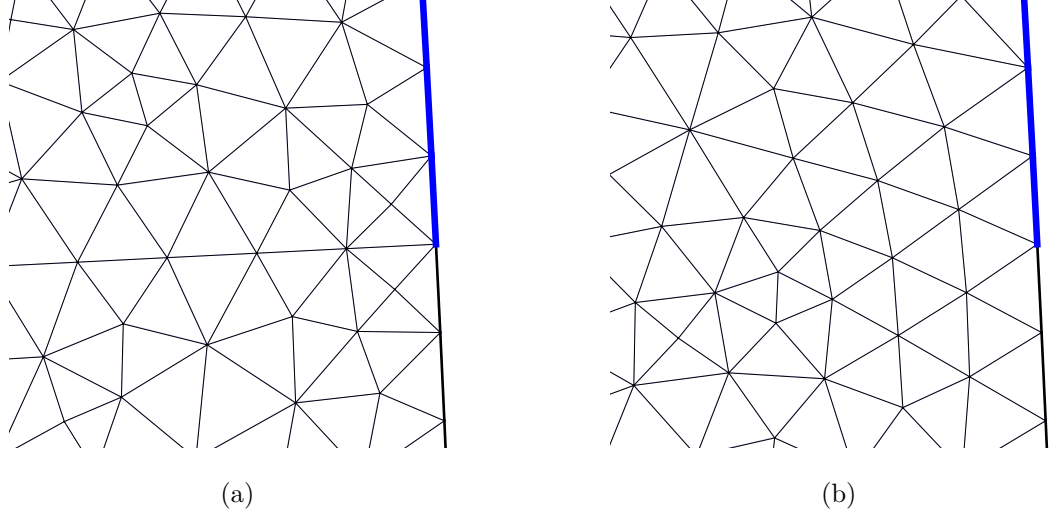


FIGURE 5.1 – Zoom sur le maillage autour de la jonction entre la paroi rigide (en noir) et le liner (en bleu). Cas où le segment partant de la jonction est orthogonal (a) et non orthogonal (b) au bord du conduit.

Il est montré dans l'article en section 5.2 que la discontinuité de la vitesse normale au bord du domaine  $u_r$  à la jonction entre la paroi rigide et le liner n'a théoriquement pas de conséquences néfastes sur le résidu des triangles de part et d'autre de la discontinuité tant que le segment commun à ces deux triangles est perpendiculaire au bord du domaine au niveau de la rupture d'impédance, comme c'est le cas figure 5.1(a). Cela s'explique par le fait que ce résidu dépend de l'intégrale sur les bords du triangle du terme :

$$[A_j n_j]^- [[\varphi]] = -\frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} n_x [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_x \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ n_y [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] - n_y \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \\ - [[\underline{u} \cdot \underline{n}]] + \left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

où n'apparaissent que les sauts de part et d'autre de l'interface de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  et de la vitesse normale aux bords du triangle (qui est ici  $u_\theta$  si la condition d'orthogonalité est respectée). Nous avons montré que ces deux grandeurs sont continues au niveau de la rupture d'impédance.

Ainsi, dans le cas où cette condition d'orthogonalité n'est pas respectée (comme par exemple figure 5.1(b)), le saut de vitesse normale  $(\underline{u}^+ - \underline{u}^-) \cdot \underline{n}$  n'est pas nul et contribue au résidu sur les deux triangles. Nous nous proposons de quantifier l'erreur alors induite. Pour cela les paramètres définis au début de la section 5 sont repris et le calcul des modes SS est fait sur deux maillages ayant quasiment le même nombre de triangles. Le premier maillage appelé par la suite maillage 1 satisfait, contrairement au deuxième maillage appelé maillage 2, la condition d'orthogonalité présentée ci-dessus. Enfin, un troisième maillage, appelé maillage 3, fortement raffiné et satisfaisant la condition d'orthogonalité est introduit comme solution de référence. Les maillages 1 et 2 sont formés respectivement de 8719 et 8711 triangles, valeurs correspondant au nombre de triangles généralement utilisé pour les calculs présentés dans l'article. Le maillage 3 est formé de 37294 triangles.

Sur la figure 5.2 est tracée, en fonction du coefficient de propagation  $\eta$ , l'erreur relative sur les nombres d'ondes obtenue sur les maillages 1 et 2 par rapport aux nombres d'ondes de référence  $k_z^3$  obtenus par calcul sur le maillage 3

$$\left| \frac{k_z - k_z^3}{k_z^3} \right|.$$

Hormis pour trois modes de coefficients de propagation  $\eta \approx 0,738$ ,  $\eta \approx 0,749$  et  $\eta \approx 0,752$  pour lesquels



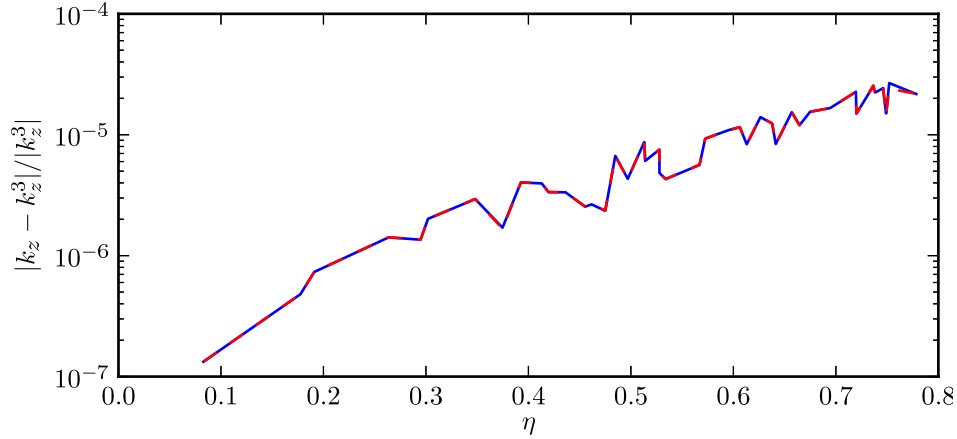


FIGURE 5.2 – Erreur relative sur les nombres d’ondes obtenus pour les maillages 1 (pointillés rouge) et 2 (en bleu) par rapport au maillage 3 de référence.

l’erreur est légèrement inférieure lorsque la condition d’orthogonalité est respectée, l’erreur obtenue dans les deux cas est identique.

Cela montre que cette condition d’orthogonalité, bien que théoriquement menant à un résidu plus petit sur les triangles, n’a pas en pratique une grande importance. Cela peut s’expliquer par le caractère très localisé de la singularité visible figure 15 de l’article.

### 5.3 Étude des effets 3D dans le banc B2A

Dans sa thèse de doctorat, Primus [116] s’est intéressé à la détermination de l’impédance dans un conduit à partir de données expérimentales par une méthode inverse. Le domaine de calcul est analogue à ceux considérés dans cette thèse et est représenté figure 5.3 (la différence étant l’utilisation de conditions aux limites non réfléchissantes caractéristiques ou d’impédance, voir section 3.2.1). L’application du code

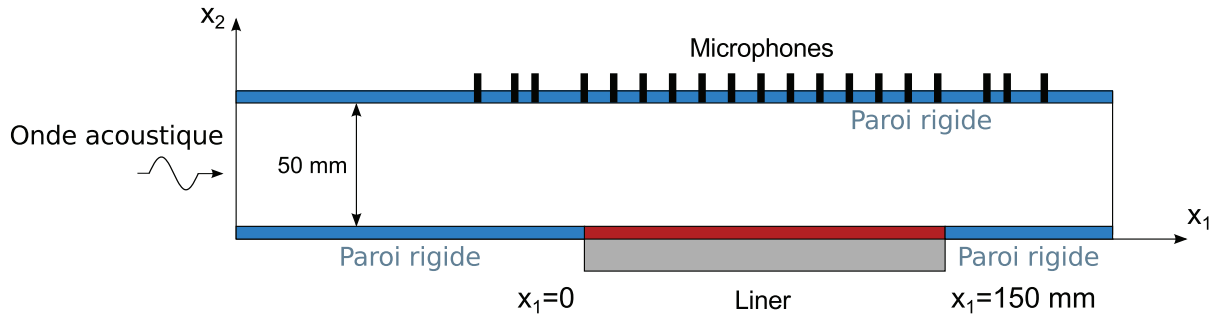


FIGURE 5.3 – Domaine de calcul utilisé pour la détermination de l’impédance par méthode inverse (source [116])

à partir de mesures de pression par microphones obtenues dans le banc B2A (présenté en section 2.1.1) n’a pas permis de retrouver l’évolution fréquentielle attendue de l’impédance [116, section V.2.1]. Il a alors été avancé que cela pouvait provenir de la géométrie du banc B2A. En effet, comme cela est visible sur la figure 2.1, le matériau absorbant étudié ne recouvre que 60% de la largeur du conduit.

Nous nous proposons d’utiliser l’analyse modale pour étudier l’effet de la taille réduite de liner sur la propagation acoustique. Nous nous intéressons dans un premier temps à la modification induite sur l’évolution selon l’axe du conduit (évolution mesurée par les microphones placés sur la paroi supérieure du conduit). Dans un second temps est étudiée la modification provoquée sur l’évolution en  $y$  (évolution mesurée, en plus de l’évolution axiale, dans le cas d’une mesure du champ acoustique par LDV).

### 5.3.1 Effets sur l'évolution axiale

Dans cette section est étudié l'effet de la taille réduite du liner dans le banc B2A sur l'évolution axiale de la perturbation acoustique. Pour cela, des calculs sont effectués sans écoulement dans la section transverse du banc B2A. Le problème étant symétrique, seule une moitié de domaine est considérée et le maillage est raffiné à la jonction entre la paroi rigide et le liner, voir figure 5.4. L'impédance du liner

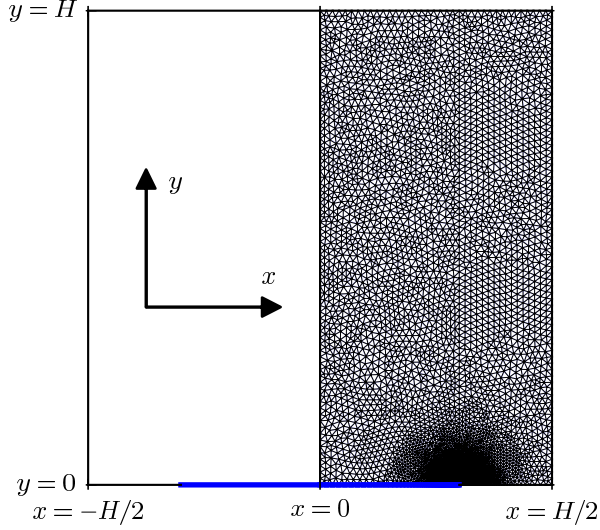


FIGURE 5.4 – Maillage du banc B2A. En bleu est représenté la portion traitée du conduit.

imposée suit le modèle du résonateur d'Helmholtz, présenté en section 2.2.1.2 et rappelé ici<sup>1</sup> :

$$Z_{HR}(\omega) = R + i \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} \right).$$

Trois valeurs de la résistance de plaque perforée sont choisies :  $R \in \{0,2; 1; 5\}$ . La profondeur des cavités du liner  $h$  est choisie telle que la résonance ait lieu à 2000 Hz (la fréquence de résonance dans [116] est 1800 Hz), soit  $h/H = 0,85$ ,  $H$  étant la hauteur du conduit. Les calculs sont effectués pour  $\omega H/a_0 \in \{0,92; 1,30; 1,85; 2,39; 2,77\}$ , soit  $\Im(Z) \in \{1; 0,5; 0; -0,5; -1\}$ . Pour chaque calcul est recherchée la valeur de l'impédance  $Z_{uni}$  d'un liner recouvrant toute la largeur du conduit menant pour le mode plan<sup>2</sup> au même nombre d'onde  $k_z$ , c'est-à-dire donnant la même évolution selon l'axe du conduit. Cette approche est suffisante pour reproduire les calculs effectués par Primus puisque la mesure par microphones sur la paroi supérieure du conduit ne donne d'informations que sur l'évolution selon l'axe du conduit.

$Z_{uni}$  est déterminée analytiquement par : (voir la solution analytique donnée en annexe section B.1.1.2)

$$Z_{uni} = \frac{\omega}{ia_0 k_y \tan(Hk_y)} \text{ avec } k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{a_0^2} - k_z^2}.$$

Figures 5.5, 5.6 et 5.7 sont tracées respectivement les résistances et réactances ainsi obtenues pour les trois valeurs de  $R$ . Pour  $R = 1$ , une série de calcul supplémentaire a été menée pour déterminer  $Z_{uni}$  à partir de calculs sur une configuration où 80% de la paroi inférieure est traitée (au lieu de 60%). Concernant la résistance, il est observé qu'elle ne varie que très peu en fréquence. Pour  $R = 0,2$ , la valeur moyenne de  $Z_{uni}$  sur les 5 fréquences est 0,336 et l'écart relatif maximum par rapport à cette valeur moyenne est de  $2,9 \times 10^{-2}$ . Pour  $R = 5$ , la valeur moyenne est de 8,33 avec un écart relatif maximum de  $5 \times 10^{-5}$ . Pour  $R = 1$ , la valeur moyenne est de 1,668 (respectivement 1,251) avec un écart

1. Nous rappelons que la «convention stabilité»  $\exp -i\omega t$  a été adoptée dans ce manuscrit, l'impédance correspond ainsi au complexe conjugué de l'impédance en «convention acoustique».

2. L'appellation mode plan est ici abusive. Le mode appelé mode plan ici correspond en fait au mode obtenu en suivant le mode plan lorsque l'impédance est progressivement variée de l'infini à  $Z$ .

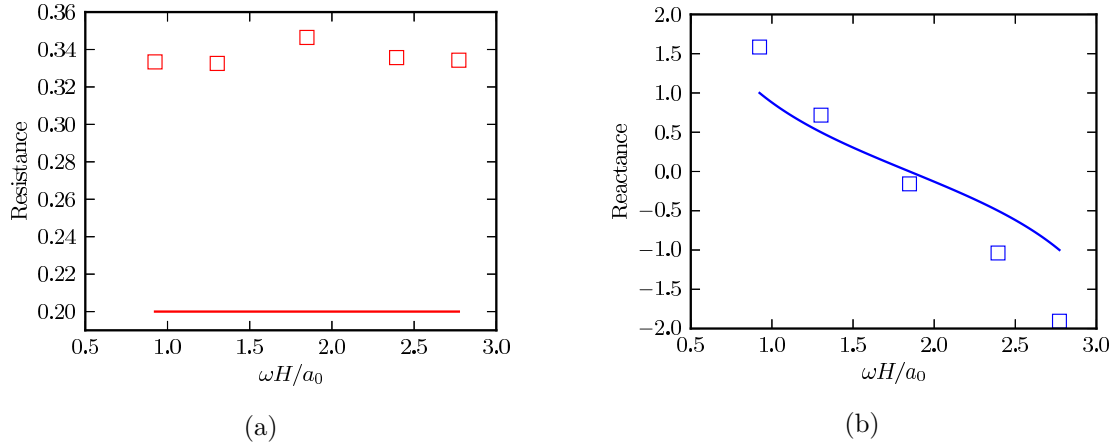


FIGURE 5.5 – Résistance (a) et réactance (b) pour  $R = 0,2$  : l'impédance  $Z_{uni}$  est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz  $Z_{HR}$  imposé dans le calcul transverse.

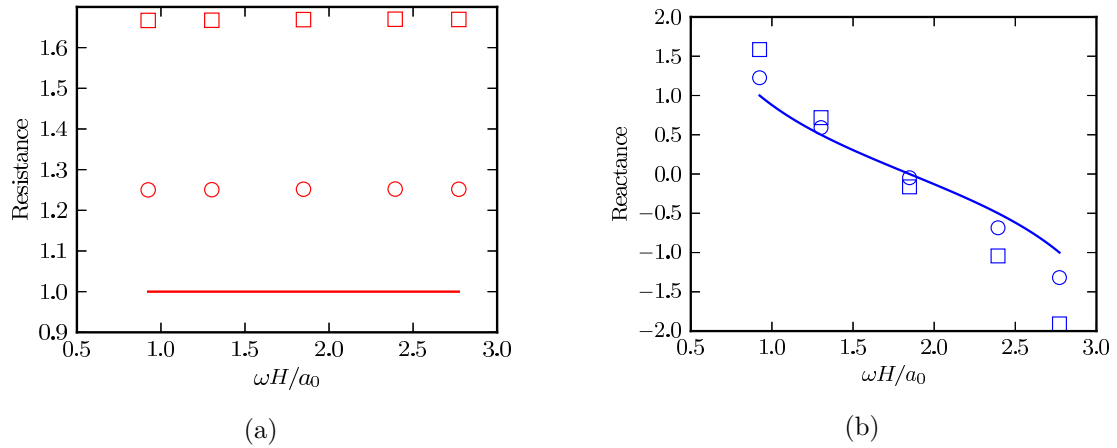


FIGURE 5.6 – Résistance (a) et réactance (b) pour  $R = 1$  : l'impédance  $Z_{uni}$  est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz  $Z_{HR}$  imposé dans le calcul transverse. Les ronds représentent la valeur de  $Z_{uni}$  obtenue à partir d'un calcul où 80% de la paroi inférieure est traitée acoustiquement.

relatif maximum de  $9,4 \times 10^{-4}$  (respectivement  $9,0 \times 10^{-4}$ ) lorsque la paroi inférieure est traitée à 60% (respectivement 80%).

Il est ainsi intéressant d'observer, en notant  $\langle Z_{uni} \rangle$  la valeur moyenne de  $Z_{uni}$  sur les cinq fréquences, que  $R/\Re(\langle Z_{uni} \rangle)$  est égal à la largeur relative du liner sur la paroi inférieure (c'est-à-dire 60% ou 80%). Comme l'avancait Primus [116], c'est donc bien le fait que l'échantillon de matériau d'absorbant ne recouvre pas toute la largeur du conduit qui est responsable d'une surévaluation de la résistance déterminée par méthode inverse.

Concernant la réactance, la méthode inverse sur-évaluait<sup>3</sup> sa valeur pour des fréquences inférieures à la résonance (définie telle que  $\Im(Z) = 0$ ). Cela correspond bien au comportement observé sur les figures 5.5,(b) 5.6(b) et 5.7(b).

### 5.3.2 Effets sur l'évolution en $y$

Contrairement au cas où les mesures sont des mesures de pression, la détermination de l'impédance à partir de mesures LDV consiste à chercher l'impédance donnant la même évolution en  $y$  et en  $z$ . En

3. L'impédance était sous-évaluée en convention acoustique donc sur-évaluée en convention stabilité.

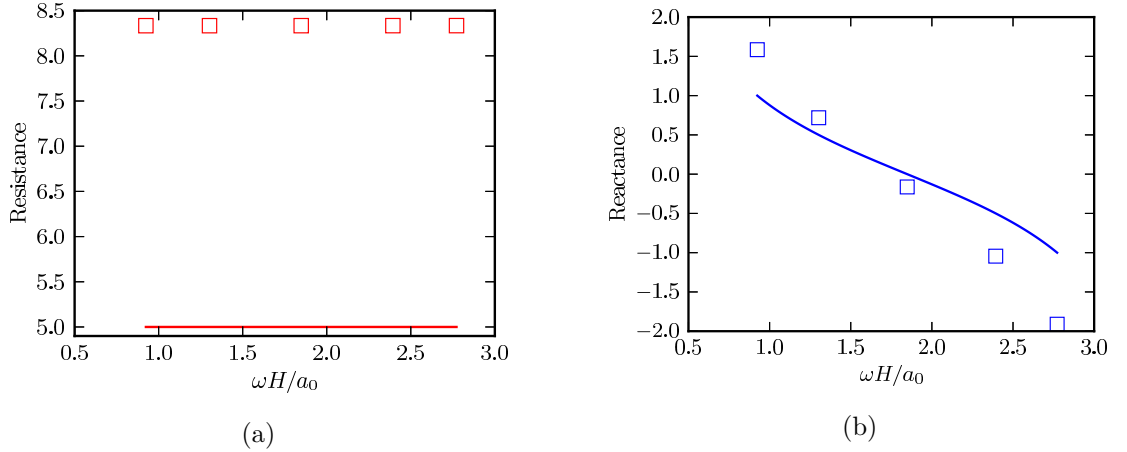


FIGURE 5.7 – Résistance (a) et réactance (b) pour  $R = 5$  : l'impédance  $Z_{uni}$  est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz  $Z_{HR}$  imposé dans le calcul transverse.

complément à l'étude faite dans la section précédente où nous nous sommes focalisés sur la direction  $z$ , nous reproduisons pour  $R = 1$  une étude similaire mais portant à présent sur la direction  $y$ . Pour cela, nous cherchons pour les cinq fréquences la valeur de l'impédance  $\hat{Z}_{uni}$  d'un liner recouvrant tout la largeur du conduit menant pour le mode plan à la même évolution en  $y$ .

Comme précédemment,  $\hat{Z}_{uni}$  est donné par :

$$\hat{Z}_{uni} = \frac{\omega}{ia_0 k_y \tan(Hk_y)} ,$$

où, à présent,  $k_y$  est déterminé en minimisant les trois équations (la minimisation est effectuée par la méthode des moindres carrés non linéaires de la librairie Python `lmfit`) :

$$\begin{cases} v(0; y) + \frac{v(0; 0)}{\sin(k_y)} \sin(k_y(y - H)) , \\ w(0; y) - w(0; H) \cos(k_y(y - H)) , \\ a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(0; y) - a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(0; H) \cos(k_y(y - H)) . \end{cases}$$

Sur les figures 5.8(a)(b) sont tracées les valeurs de la résistance et de la réactance ainsi obtenues. Les résultats obtenus à partir de  $w$  et de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sont identiques, cela s'expliquant par le fait que l'équation de quantité de mouvement sur  $\underline{e}_z$  s'écrit :

$$-i\omega w + ika_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0 .$$

La résistance ainsi obtenue est indépendante de la fréquence :  $\langle \hat{Z}_{uni} \rangle = 1,41$  avec un écart relatif maximum de  $6,1 \times 10^{-3}$  autour de cette valeur moyenne. L'impédance calculée  $\hat{Z}_{uni}$  à partir de  $w$  se rapproche plus que  $Z_{uni}$  de l'impédance  $Z_{HR}$  imposée dans le calcul transverse. À l'inverse, le calcul de  $\hat{Z}_{uni}$  à partir de  $v$  ne permet pas de retrouver le modèle d'impédance imposé pour les calculs, même qualitativement. La résistance varie en fréquence et la réactance ne suit pas une évolution proche d'une loi en cotangente.

Sur les figures 5.9 et 5.10 sont tracées respectivement, pour  $\omega = 2,77$ ,  $v$  et  $w$  en  $x = 0$  obtenues numériquement avec EMILE (sur la géométrie B2A avec  $Z = Z_{HR}$ ) et analytiquement à partir des équations :

$$\begin{cases} v|_{uni}(y) = -\frac{v(0; 0)}{\sin(k_y)} \sin(k_y(y - H)) , \\ w|_{uni}(y) = w(0; H) \cos(k_y(y - H)) . \end{cases}$$

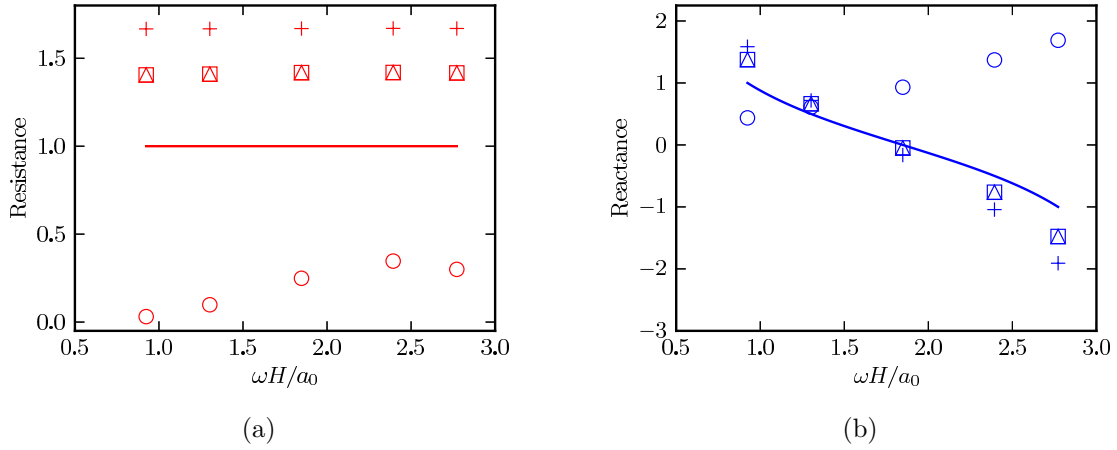


FIGURE 5.8 – Résistance (a) et réactance (b) pour  $R = 1$  : impédance  $Z_{uni}$  (symbole +) et impédance  $\hat{Z}_{uni}$  déterminée à partir de  $v$  (symbole ○), de  $w$  (symbole □) et de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  (symbole Δ). Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz  $Z_{HR}$  imposé dans le calcul transverse.

Les courbes analytiques (en rouge), bien que très proches des courbes extraites des champs calculés par **EMILE**, montrent que la géométrie du banc B2A rend l'évolution en  $y$  légèrement différente d'une évolution en cosinus ou sinus. Il est remarquable que l'écart entre  $\hat{Z}_{uni}$  déterminée à partir de  $v$  et  $Z_{HR}$  soit si important alors que l'évolution de  $v$  dans le banc B2A est relativement proche de l'évolution bidimensionnelle en cosinus.

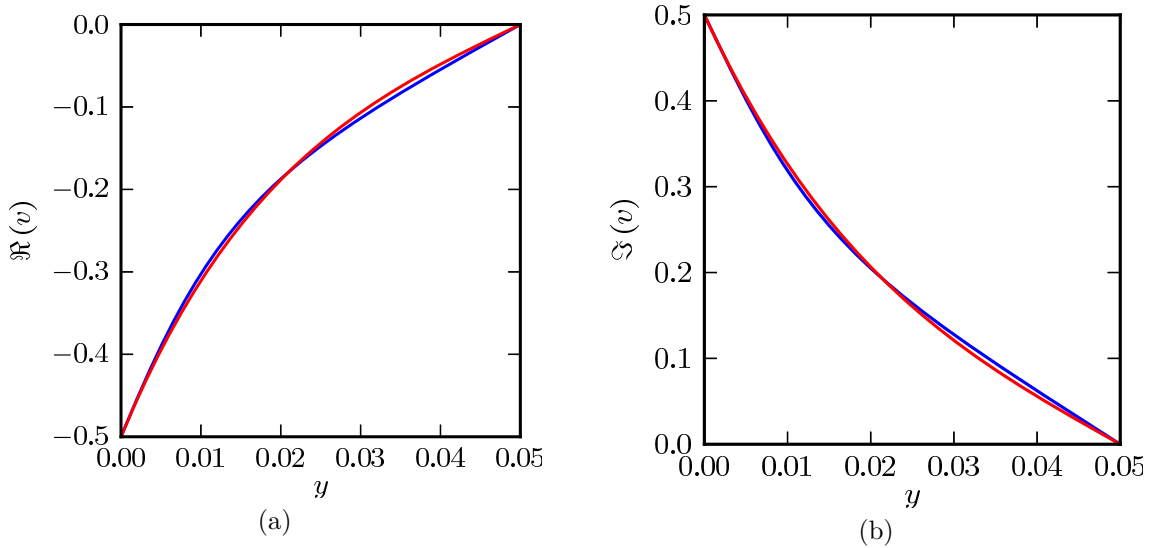


FIGURE 5.9 – Parties réelle (a) et imaginaire (b) de  $v(0; y)$  (en bleu) et de  $v|_{uni}(y)$  (en rouge).

Les mêmes conclusions peuvent être tirées pour les quatre autres fréquences. De plus, les résultats sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sont similaires à ceux obtenus sur  $w$ .

### 5.3.3 Étude sur l'évolution axiale avec écoulement

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude des effets 3D dans le banc B2A en présence d'écoulement. Ce dernier est modélisé par un écoulement de Poiseuille tridimensionnel de Mach moyen 0,25 calculé par collocation spectrale. Les autres paramètres de calculs sont les mêmes qu'en section 5.3.1 excepté la résistance qui est fixée à  $R = 1$  uniquement.

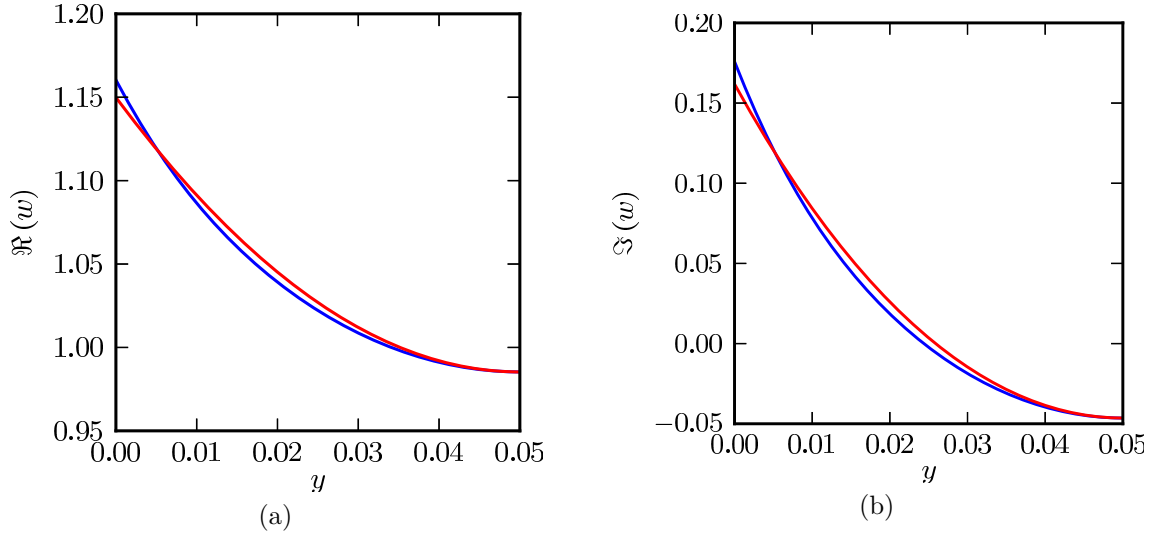


FIGURE 5.10 – Parties réelle (a) et imaginaire (b) de  $w(0; y)$  (en bleu) et de  $w|_{uni}(y)$  (en rouge).

Comme en section 5.3.1, l'idée est de rechercher, pour chaque calcul en configuration transversale, l'impédance  $Z_{uni}$  donnant un mode plan de même nombre d'onde  $k_z$  dans une configuration où la direction  $x$  est invariante. Le calcul  $Z_{uni}$  ne pouvant plus être fait analytiquement, l'impédance  $Z_{uni}$  est à présent déterminée numériquement de la façon suivante :

- ❶ Une analyse modale spatiale est effectuée avec EMILE sur la géométrie B2A, c'est-à-dire avec un liner d'impédance  $Z_{HR}$  recouvrant 60% de la paroi inférieure. Cette analyse spatiale nous donne le nombre d'onde  $k_z^{EMILE}$  du mode plan.
- ❷ Le code Galerkin discontinu unidimensionnel présenté en annexe C est utilisé avec un profil de Poiseuille de même nombre de Mach moyen  $\bar{M} = 0,25$  (ce point est justifié dans la section suivante). Cette étape permet de déterminer l'impédance à imposer sur la paroi inférieure  $Z_{uni}$  (la paroi supérieure étant rigide) telle que le mode plan ait pour valeur propre associée  $k_z = k_z^{EMILE}$ . La détermination de  $Z_{uni}$  est détaillée en annexe section C.2<sup>4</sup>.

### 5.3.3.1 Effet de l'écoulement

Avant d'étudier les effets tridimensionnels dus à la géométrie du banc B2A, il convient d'analyser dans un premier temps les effets dus au caractère tridimensionnel de l'écoulement porteur sur une configuration identique à celle du banc B2A où la paroi inférieure est à présent entièrement revêtu d'un matériau absorbant. Pour cela nous suivons une approche de celle présentée ci-dessus :

- ❶ Un calcul avec EMILE est effectué pour déterminer le nombre d'onde  $k_z^{EMILE}$  du mode plan sur la géométrie B2A où un liner d'impédance  $Z_{HR}$  recouvre l'intégralité de la paroi inférieure.
- ❷ À l'aide du solveur Galerkin discontinu unidimensionnel nous recherchons l'impédance  $Z_{uni}$  donnant un mode plan de nombre d'onde  $k_z$  vérifiant  $k_z = k_z^{EMILE}$ . Ce calcul est effectué avec un écoulement de Poiseuille de même Mach moyen que l'écoulement de Poiseuille tridimensionnel ( $\bar{M} = 0,25$ ) et avec un écoulement de Poiseuille de même nombre de Mach moyen que le profil obtenu par projection de l'écoulement de Poiseuille tridimensionnel sur  $x = 0$  ( $\bar{M} = 0,36$ ). Ces deux profils ainsi que la projection de l'écoulement de Poiseuille tridimensionnel sur  $x = 0$  sont représentés figure 5.11.

Les résultats des calculs de détermination de  $Z_{uni}$  pour  $\bar{M} = 0,25$  et pour  $\bar{M} = 0,36$  sont représentés figures 5.12(a) et (b). Pour  $\bar{M} = 0,25$  nous observons un écart assez faible entre  $Z_{uni}$  et l'impédance  $Z_{HR}$  imposée lors des calculs menés avec EMILE. Les écarts relatifs pour les cinq pulsations sont donnés tableau 5.1. Pour  $\omega H/a_0 = 1,85$ ,  $\Im(Z_{HR}) = 0$  et l'écart relatif n'est ainsi pas défini. L'écart absolu est  $4,6 \times 10^{-2}$ . Il est remarquable que la résistance ne soit plus indépendante de la fréquence comme c'était le cas dans les études précédentes sans écoulement.

4. Dans le code Galerkin discontinu l'axe du conduit est noté  $x$ , ainsi le nombre d'onde axial ici noté  $k_z$  est noté  $k_x$  en section C.2

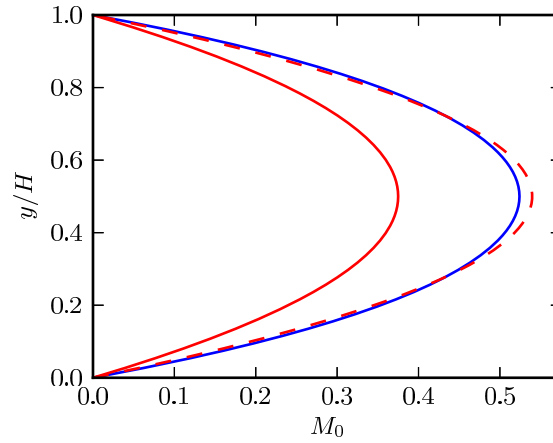


FIGURE 5.11 – Nombre de Mach de l'écoulement de Poiseuille imposé dans EMILE projeté en  $x = 0$  (courbe bleue) et de l'écoulement utilisé dans le code unidimensionnel de Mach moyen 0,25 (ligne rouge continue) et de Mach moyen 0,36 (ligne rouge pointillée).

| $\omega H/a_0$                             | 0,92 | 1,30 | 1,85 | 2,39 | 2,77 |
|--|------|------|------|------|------|
| $ Z_{HR} - Z_{uni} /Z_{HR}$                | 12%  | 8,4% | 4,7% | 8,8% | 15%  |
| $ \Re(Z_{HR}) - \Re(Z_{uni}) /\Re(Z_{HR})$ | 14%  | 9,4% | 0,8% | 10%  | 19%  |
| $ \Im(Z_{HR}) - \Im(Z_{uni}) /\Im(Z_{HR})$ | 10%  | 1,5% |      | 2,5% | 9,6% |

TABLE 5.1 – Écart relatif entre  $Z_{HR}$  et  $Z_{uni}$  (cas avec écoulement  $M=0,25$  et revêtement acoustique uniforme).

Pour  $M = 0,36$ , d'importants écarts sont observés entre  $Z_{uni}$  et  $Z_{HR}$ , cette valeur du Mach moyen ne sera pas retenue par la suite.

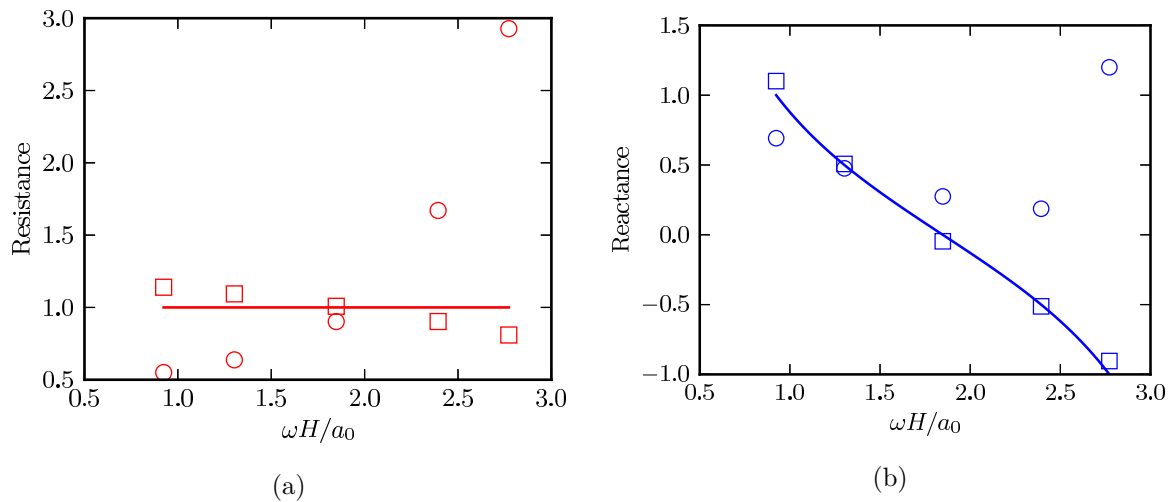


FIGURE 5.12 – Résistance (a) et réactance (b) : l'impédance  $Z_{uni}$  est représentée par des carrés pour  $M = 0,25$  et par des cercles pour  $M = 0,36$ . Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz imposé dans le calcul transverse.

Nous observons ainsi que le caractère tridimensionnel de l'écoulement a un effet modéré mais non négligeable et cela principalement sur la résistance.

### 5.3.3.2 Effet de la géométrie du banc B2A

L'impédance  $Z_{uni}$  est déterminée par calcul unidimensionnel avec un écoulement de Poiseuille de Mach moyen  $M = 0,25$  à partir des calculs effectués sur la configuration B2A avec le code EMILE. Les résistances et réactances ainsi déterminées sont tracées figures 5.13(a) et (b). La résistance obtenue est en fort désaccord avec la résistance  $\Re(Z_{HR})$ . D'un point de vue qualitatif, nous remarquons que celle-ci n'est plus indépendante en fréquence. Qualitativement nous observons que l'erreur est bien moins importante pour les hautes fréquences.

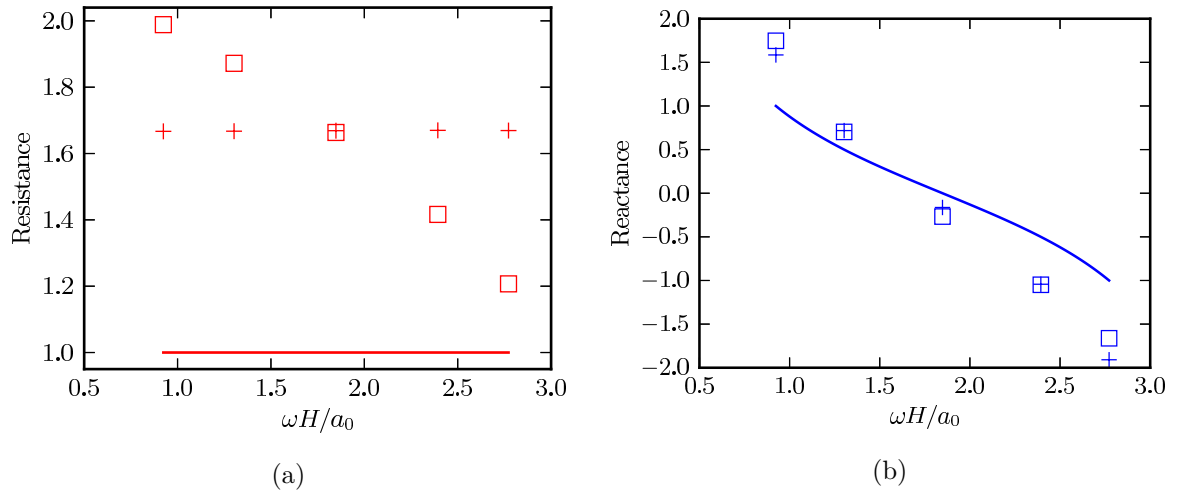


FIGURE 5.13 – Résistance (a) et réactance (b) : l'impédance  $Z_{uni}$  est représentée par des carrés. Les traits continus représentent le modèle du résonateur d'Helmholtz imposé dans le calcul transverse. Les croix correspondent

Dans le cas avec écoulement, l'erreur entre  $Z_{HR}$  et  $Z_{uni}$  varie plus fortement en fréquence que sans écoulement. Néanmoins cette erreur est du même ordre de grandeur dans le cas avec et sans écoulement (l'erreur relative moyenne sur les cinq pulsations est identique avec et sans écoulement : 70%). Cette conclusion est en désaccord avec l'hypothèse faite par Primus [116, section VI.2] selon laquelle les effets de montage du banc B2A sont amoindris en présence d'écoulement. Néanmoins, l'écoulement circulant dans la banc B2A étant fortement différent d'un écoulement de Poiseuille (voir figure [116, figure VI.10(b)]), il serait intéressant de réaliser une étude identique en considérant un écoulement plus réaliste, point abordé par Rodrigues Sanchez [134].



## Quatrième partie

# Analyse modale et stabilité non modale dans le plan longitudinal d'un conduit



## CHAPITRE 6

# MISE EN PLACE DES OUTILS POUR L'ANALYSE DE STABILITÉ MODALE ET NON MODALE DANS LE PLAN LONGITUDINAL D'UN CONDUIT

Ce chapitre est dédié à la mise en place des outils pour l'étude dans le plan longitudinal d'un conduit, cas pour lequel le problème est ouvert en amont et en aval et requiert donc des conditions aux limites adaptées. Cette étude peut être menée dans un formalisme dit modal ou non modal. Pour ce dernier, nous nous intéressons à la recherche de la perturbation initiale optimale. Comme nous l'avons vu au chapitre 2.4, cette analyse repose principalement sur l'intégration temporelle des problèmes direct et adjoint. Ainsi, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'implantation de conditions aux limites PML pour le problème temporel. L'opérateur adjoint en présence de PML ainsi que son implantation sont ensuite présentés.

Dans un second temps, nous nous intéressons à l'utilisation de conditions aux limites PML pour le calcul modal. Nous développons une première formulation directement à partir de la formulation temporelle puis nous présentons une deuxième formulation des équations obtenue en modifiant le prolongement analytique.

Une section est ensuite dédiée aux schémas temporels utilisés puis des cas de validations sont présentés en calcul temporel avec écoulement et en analyse modale sans écoulement.

### Sommaire

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>6.1</b> | <b>Implantation de conditions aux limites PML pour le calcul non modal . .</b>   | <b>98</b>  |
| 6.1.1      | Problème direct . . . . .  | 98         |
| 6.1.2      | Problème adjoint . . . . .   | 100        |
| <b>6.2</b> | <b>Implantation de conditions aux limites PML pour le calcul modal . . . . .</b> | <b>104</b> |
| 6.2.1      | Première formulation . . . . .   | 104        |
| 6.2.2      | Autre formulation . . . . .  | 104        |
| <b>6.3</b> | <b>Schémas temporels . . . . .</b>   | <b>105</b> |
| 6.3.1      | Schéma explicite . . . . .   | 105        |
| 6.3.2      | Schéma implicite . . . . .   | 106        |
| <b>6.4</b> | <b>Validations et illustrations . . . . .</b>                                    | <b>107</b> |
| 6.4.1      | Utilisation des PML pour la propagation acoustique en domaine temporel . . .     | 107        |
| 6.4.2      | Validation des PML pour le calcul modal . . . . .                                | 108        |

## 6.1 Implantation de conditions aux limites PML pour le calcul non modal

### 6.1.1 Problème direct

#### 6.1.1.1 Discrétisation des équations avec PML

Dans le cadre de ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de conduit infini présentant une zone rendant le problème non homogène selon l'axe du conduit  $x$ . Afin de modéliser ce domaine physique infini par un domaine de calcul borné, nous plaçons en amont et en aval du domaine d'étude des couches PML (voir section 3.2.2). Le domaine de calcul est représenté figure 6.1.

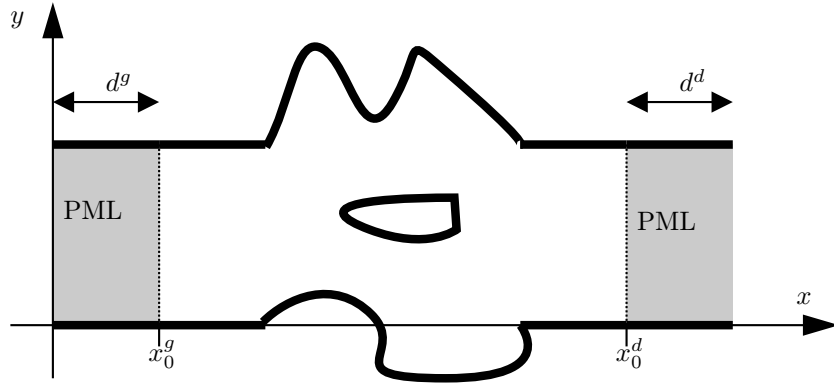


FIGURE 6.1 – Domaine de calcul obtenu par introduction de domaines PML.

Les équations d'Euler linéarisées dans les couches PML (eq. (3.29)) sont rappelées ici :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}'_y \partial_y \underline{\phi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}}' \underline{\phi} = \underline{0} \quad (6.1a)$$

$$\partial_t \underline{\phi} = \underline{\varphi} \quad (6.1b)$$

avec  $\underline{\underline{B}} = (\underline{B} + \Sigma' \underline{I} + \Sigma' \tau \underline{A}_x)$ . Nous rappelons que ces équations ont été obtenues en appliquant la transformation spatio-temporelle

$$\underline{t} \rightarrow t + \tau x$$

puis en prolongeant analytiquement  $x$  dans les couches PML en

$$x \rightarrow x + i \frac{\Sigma}{\omega}$$

puis en revenant dans le référentiel spatio-temporel initial. La fonction  $\Sigma$  étant définie comme identiquement nulle dans la zone physique, l'équation (6.1)(a) est aussi valide dans le domaine physique et l'introduction de la primitive  $\underline{\phi}$  est alors inutile.

Concernant la première équation, la formulation Galerkin discontinue est obtenue en suivant la même démarche qu'en sections 3.1.1 et 4.1.1, ce qui mène à la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}'_y \partial_y \underline{\phi} + \underline{\underline{B}}' \underline{\phi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} \left[ \underline{\underline{A}}_j \, n_j \right]^- [[\underline{\varphi}]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}}(\beta) \, \underline{\varphi}^- \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma \\ + \int_{\partial D_l} \left[ \tilde{\Pi}(\underline{\phi}^-; \underline{\phi}^+; \underline{n}) - \Sigma' \underline{\underline{A}}_y \, n_y \, \underline{\phi}^- \right] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

où le flux numérique  $\tilde{\Pi}(\underline{\phi}^-; \underline{\phi}^+; \underline{n})$  est introduit. Comme dans la référence [75], un flux décentré amont est utilisé à la différence que dans notre cas le maillage est composé de triangles et non de quadrangles.

La valeur de  $n_y$  n'est donc pas limitée à l'ensemble  $\{0; \pm 1\}$ . Bien que  $\Sigma' A_y n_y$  ne soit pas symétrique réelle, ses valeurs propres sont bien réelles et sont  $\{\Sigma' V_0 n_y; \Sigma'(V_0 - a_0)n_y; \Sigma'(V_0 + a_0)n_y\}$ . Le flux décentré amont s'écrit alors :

$$\tilde{\Pi}(\underline{\phi}^-; \underline{\phi}^+; \underline{n}) = \left[ \Sigma' \underline{\underline{A_y n_y}} \right]^- \underline{\varphi}^+ + \left[ \Sigma' \underline{\underline{A_y n_y}} \right]^+ \underline{\varphi}^- \quad (6.3)$$

avec<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \left[ \Sigma' \underline{\underline{A_y n_y}} \right]^- &= \min(0; \Sigma' V_0 n_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \min\left(0; \Sigma' n_y \frac{V_0 - a_0}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \min\left(0; \Sigma' n_y \frac{V_0 + a_0}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \left[ \Sigma' \underline{\underline{A_y n_y}} \right]^+ &= \max(0; \Sigma' V_0 n_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \max\left(0; \Sigma' n_y \frac{V_0 - a_0}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \max\left(0; \Sigma' n_y \frac{V_0 + a_0}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les bord amont et aval d'un domaine PML ainsi que les interfaces avec le domaine physique étant verticaux (voir figure 6.1), le flux  $\tilde{\Pi}$  y est nul ( $n_y = 0$ ). Les frontières hautes et basses des couches PML sont définies comme rigides et il n'est ainsi pas possible d'étudier des configurations avec liners infinis à ce stade de développement du code. Sur une paroi rigide (nécessairement horizontale dans une couche PML voir figure 6.1), la condition  $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$  est traduite sur  $\underline{\phi}$  par  $(\phi)_1 n_x + (\phi)_2 n_y = (\phi)_2 n_y = 0$ .

Au final, la formulation Galerkin discontinue s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A_j}} \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{\underline{A_y}} \partial_y \underline{\phi} + \Sigma' \underline{\underline{B}} \underline{\phi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} \left[ \underline{\underline{A_j}} n_j \right]^- [[\underline{\varphi}]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}}(\beta) \underline{\varphi}^- \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma \\ + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} \left[ \Sigma' \underline{\underline{A_y}} n_y \right]^- [[\underline{\phi}]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^- \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma \end{aligned} \quad (6.5)$$

où :

$$\underline{\underline{M}} = \Sigma' a_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & -n_y & 0 \end{pmatrix}.$$

À ce stade du développement du code EMILE, le vecteur global<sup>2</sup>  $\underline{\phi}$  est construit sur l'ensemble du maillage. Cela permet de simplifier l'implantation des conditions aux limites PML mais a pour inconvénient d'augmenter le coût en mémoire et de dégrader très légèrement les performances numériques. À l'avenir, il pourra être envisagé de modifier cela et de ne construire  $\underline{\phi}$  que sur les triangles appartenant aux couches PML.

Le problème global s'écrit :

$$\underline{\underline{M}} \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{R}} \underline{\varphi} + \underline{\underline{R}}_\phi \underline{\phi} = \underline{\mathbf{0}}, \quad (6.6)$$

où  $\underline{\underline{M}}$  est la matrice de masse, les correspondances sont données ci-dessous :

1. Il a ici été choisi de garder la forme générale des matrices même si celles-ci peuvent être simplifiées en notant que la composante de vitesse  $V_0$  est nulle dans les couches PML.

2. Rappel : vecteurs et matrices globales. Nous rappelons (voir section 3.1.3) que les vecteurs et matrices globales, notés en gras, font intervenir l'ensemble des points de contrôle du maillage. Ainsi, le vecteur global  $\underline{\phi}$  est constitué de l'ensemble des vecteurs d'inconnus  $\underline{\phi}_i^l$  à chaque point de contrôle  $i$  de chaque triangle du maillage  $l$ .

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}\underline{\varphi} \longleftrightarrow \int_{D_l} \partial_t \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ \underline{\underline{R}}\underline{\varphi} \longleftrightarrow \int_{D_l} \left( \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- [[\underline{\varphi}]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma \\ \quad + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}}(\beta) \underline{\varphi}^- \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma \\ \underline{\underline{R}}\underline{\phi} \longleftrightarrow \int_{D_l} \left( \Sigma' \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\phi} + \Sigma' \underline{\underline{B}} \underline{\phi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} \left[ \Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y \right]^- [[\underline{\phi}]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma \\ \quad + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^- \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma . \end{cases}$$

La discrétisation de la deuxième équation vectorielle  $\partial_t \underline{\phi} = \underline{\varphi}$  du système d'équations (6.1) donne :

$$\forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \int_{D_l} (\partial_t \underline{\phi} - \underline{\varphi}) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega = 0 \quad (6.7)$$

qui se traduit pour le problème global par :

$$\partial_t \underline{\phi} = \underline{\underline{P}}^{pmi} \underline{\varphi} , \quad (6.8)$$

où  $\underline{\underline{P}}^{pmi}$  est la matrice globale de projection sur les couches PML. Celle-ci est une matrice diagonale par bloc où les blocs correspondant aux éléments du maillage physique sont nuls tandis que les blocs correspondant aux éléments des couches PML sont des blocs identité.

## 6.1.2 Problème adjoint

### 6.1.2.1 Adjoint du problème continu

Soient  $\tilde{\underline{H}}$  et  $\tilde{\underline{H}}'$  deux opérateurs définis par :

$$\begin{cases} \tilde{\underline{H}}(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) = \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\phi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{\underline{B}} \underline{\phi} , \\ \tilde{\underline{H}}'(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) = \partial_t \underline{\phi} - \underline{\varphi} . \end{cases}$$

Les opérateurs adjoints  $\tilde{\underline{H}}^*$  et  $\tilde{\underline{H}}'^*$  sont cherchés tels que :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\varphi}, \underline{\varphi}^*, \underline{\phi}, \underline{\phi}^* \left( \tilde{\underline{H}}(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) \Big| \underline{\varphi}^* \right)_{\Omega \times [0; T]} + \left( \tilde{\underline{H}}'(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) \Big| \underline{\phi}^* \right)_{\Omega \times [0; T]} \\ = \left( \underline{\varphi} \Big| \tilde{\underline{H}}^*(\underline{\varphi}^*; \underline{\phi}^*) \right)_{\Omega \times [0; T]} + \left( \underline{\phi} \Big| \tilde{\underline{H}}'^*(\underline{\varphi}^*; \underline{\phi}^*) \right)_{\Omega \times [0; T]} , \end{aligned}$$

où  $\left( \cdot \Big| \cdot \right)_{\Omega \times [0; T]}$  est le produit scalaire défini par :

$$\left( \underline{\varphi}_1 \Big| \underline{\varphi}_2 \right)_{\Omega \times [0; T]} = \int_{[0; T]} \langle \underline{\varphi}_1; \underline{\varphi}_2 \rangle_{\Omega} \, dt = \int_{\Omega \times [0; T]} \underline{\varphi}_1 \cdot \overline{\underline{\varphi}_2} \, d\Omega \, dt .$$

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{\underline{H}}(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) \Big| \underline{\varphi}^* \right)_{\Omega \times [0; T]} + \left( \tilde{\underline{H}}'(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) \Big| \underline{\phi}^* \right)_{\Omega \times [0; T]} \\ &= \int_{\Omega \times [0; T]} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\phi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{\underline{B}} \underline{\phi} \right) \cdot \overline{\underline{\varphi}^*} \, d\Omega + \int_{\Omega \times [0; T]} (\partial_t \underline{\phi} - \underline{\varphi}) \cdot \overline{\underline{\phi}^*} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega \times [0; T]} \underline{\varphi} \cdot \left( -\partial_t \overline{\underline{\varphi}^*} - \underline{\underline{A}}_j \partial_j \overline{\underline{\varphi}^*} + \left( \underline{\underline{B}}^T - \partial_j \underline{\underline{A}}_j \right) \overline{\underline{\varphi}^*} - \overline{\underline{\phi}^*} \right) \, d\Omega + \left[ \int_{\Omega} \underline{\varphi} \cdot \overline{\underline{\varphi}^*} \, d\Omega \right]_0^T \\ &+ \int_{\Omega \times [0; T]} \underline{\phi} \cdot \left( -\partial_t \overline{\underline{\phi}^*} - \Sigma' \underline{\underline{A}}_y \partial_y \overline{\underline{\varphi}^*} + \left( \Sigma' \underline{\underline{B}}^T - \Sigma' \partial_y \underline{\underline{A}}_y \right) \overline{\underline{\varphi}^*} \right) \, d\Omega + \left[ \int_{\Omega} \underline{\phi} \cdot \overline{\underline{\phi}^*} \, d\Omega \right]_0^T \\ &+ \int_{\partial \Omega \times [0; T]} \underline{\varphi} \cdot \underline{\underline{A}}_j n_j \overline{\underline{\varphi}^*} \, d\Gamma \, dt + \int_{\partial \Omega \times [0; T]} \underline{\phi} \cdot \Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y \overline{\underline{\varphi}^*} \, d\Gamma \, dt . \end{aligned}$$

Le traitement des termes de «bord temporels» dépend du problème considéré. Comme nous le verrons au chapitre 8, dans le cas par exemple d'une recherche de la perturbation initiale optimale, les termes de bord temporels permettent d'initialiser les variables à chaque itération du processus. Afin de simplifier les équations, ils sont ignorés ici (mais seront bien utilisés dans le chapitre 8) et les opérateurs adjoints s'écrivent

$$\begin{cases} \tilde{H}^*(\varphi^*; \phi^*) = -\partial_t \varphi^* - \underline{A}_j \partial_j \varphi^* + (\underline{\tilde{B}}^T - \partial_j \underline{A}_j) \varphi^* - \phi^* = 0 \\ \tilde{H}'^*(\varphi^*; \phi^*) = -\partial_t \phi^* - \Sigma' \underline{A}_y \partial_y \varphi^* + (\Sigma' \underline{B}^T - \Sigma' \partial_y \underline{A}_y) \varphi^* = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

et sont associés à la condition aux limites sur l'état adjoint :

$$-\overline{Z} \underline{u}^* \cdot \underline{n} = a_0 \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad (6.10)$$

ce qui permet l'annulation des termes de bord  $\int_{\partial\Omega \times [0; T]} \varphi \cdot \underline{A}_j n_j \overline{\varphi^*} d\Gamma dt$  et  $\int_{\partial\Omega \times [0; T]} \phi \cdot \Sigma' \underline{A}_y n_y \overline{\varphi^*} d\Gamma dt$  (nous rappelons que les parois sont rigides et horizontales dans les zones PML et ainsi, d'une part, la valeur de l'impédance  $y$  est  $Z = \infty$  d'où  $v^* = 0$  et, d'autre part, la condition  $(\phi)_2 = 0$   $y$  est imposée).

➤ Remarque : Le terme  $\Sigma' \partial_y \underline{A}_y$  a été conservé bien que nul d'après les hypothèses invoquées.

### 6.1.2.2 Discrétisation de l'adjoint continu

La formulation Galerkin discontinue des équations (6.9) est développée en suivant la démarche habituelle. Le flux décentré amont est utilisé entre les éléments. L'imposition de la condition aux limites eq. (6.10) s'écrit :

$$(\tilde{\beta} - 1) a_0 \frac{\rho^*}{\rho_0} + (\tilde{\beta} + 1) \underline{u}^* \cdot \underline{n} = 0,$$

où  $\tilde{\beta} = (1 + \overline{Z})/(\overline{Z} - 1)$ . En remarquant que  $\tilde{\beta} = \overline{\beta}^{-1}$ , la condition aux limites s'écrit aussi :

$$(1 - \overline{\beta}) a_0 \frac{\rho^*}{\rho_0} + (1 + \overline{\beta}) \underline{u}^* \cdot \underline{n} = 0.$$

La formulation suivante est alors obtenue :

$$\forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, \forall \underline{\psi}_m \left\{ \begin{array}{l} \int_{D_l} \left( -\partial_t \varphi^* - \underline{A}_j \partial_j \varphi^* + (\underline{\tilde{B}}^T - \partial_j \underline{A}_j) \varphi^* - \phi^* \right) \cdot \underline{\psi}_m d\Omega \\ \quad + \int_{\partial D_l \setminus \partial\Omega_h} \left[ -\underline{A}_j \ n_j \right]^- [[\varphi^*]] \cdot \underline{\psi}_m d\Gamma \\ \quad + \int_{\partial D_l \cap \partial\Omega_h} \underline{\tilde{M}}^*(\beta) \varphi^{*-} \cdot \underline{\psi}_m d\Gamma = 0 \\ \int_{D_l} \left( -\partial_t \phi^* - \Sigma' \underline{A}_y \partial_y \varphi^* + (\Sigma' \underline{B}^T - \Sigma' \partial_y \underline{A}_y) \varphi^* \right) \cdot \underline{\psi}_m d\Omega \\ \quad + \int_{\partial D_l \setminus \partial\Omega_h} \left[ -\Sigma' \underline{A}_y \ n_y \right]^- [[\varphi^*]] \cdot \underline{\psi}_m d\Gamma \\ \quad + \int_{\partial D_l \cap \partial\Omega_h} \underline{\tilde{M}}^* \varphi^{*-} \cdot \underline{\psi}_m d\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (6.11)$$

avec :

$$\underline{\tilde{M}}^*(\beta) = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} (\overline{\beta} + 1) \underline{n} \otimes \underline{n} & -(\overline{\beta} - 1) \underline{n} \\ (1 + \overline{\beta}) \underline{n}^T & (1 - \overline{\beta}) \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

et :

$$\underline{\tilde{M}}^* = \Sigma' a_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \end{pmatrix}.$$

### 6.1.2.3 Adjoint des équations discrétisées

Dans cette section, nous développons l'adjoint du problème discrétisé afin de montrer qu'il y a bien équivalence avec le discrétisé des équations adjointes continues comme annoncé en section 3.1.2.2. Soient  $\underline{\varphi}^*$  et  $\underline{\phi}^*$  deux fonctions tests, la formulation Galerkin discontinue s'écrit pour l'élément  $l$  :

$$\begin{aligned} & \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} + \Sigma' \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\phi} + \Sigma' \underline{\underline{B}} \underline{\phi} \mid \varphi^* \right)_{D_l \times [0; T]} + \left( \underline{\underline{M}}(\beta) \underline{\varphi}^- \mid \varphi^* \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} \\ & + \left( \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- \mid [\underline{\varphi}] \mid \varphi^* \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]} + \left( \left[ \Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y \right]^- \mid [\underline{\phi}] \mid \varphi^* \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]} \\ & + \left( \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^- \mid \varphi^* \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} + \left( \partial_t \underline{\phi} - \underline{\varphi} \mid \phi^* \right)_{D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Une intégration par parties donne (les termes de bord temporels sont omis pour la même raison qu'en 6.1.2.1) :

$$\begin{aligned} 0 = & \left( \underline{\varphi} \mid -\partial_t \underline{\varphi}^* - \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi}^* + \left( \underline{\underline{B}}^T - \partial_j \underline{\underline{A}}_j \right) \underline{\varphi}^* - \underline{\phi}^* \right)_{D_l \times [0; T]} \\ & + \left( \underline{\varphi}^- \mid \left( \underline{\underline{M}}(\beta)^H + \underline{\underline{A}}_j n_j \right) \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} + \left( \underline{\varphi}^+ \mid \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]} \\ & + \left( \underline{\varphi}^- \mid \left( \underline{\underline{A}}_j n_j - \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- \right) \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]} \\ & + \left( \underline{\phi} \mid -\partial_t \underline{\phi}^* - \Sigma' \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi}^* + \Sigma' \left( \underline{\underline{B}}^T - \partial_y \underline{\underline{A}}_y \right) \underline{\varphi}^* \right)_{D_l \times [0; T]} \\ & + \left( \underline{\phi}^- \mid \left( \underline{\underline{M}}^H + \Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y \right) \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} + \left( \underline{\phi}^+ \mid \left[ \Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y \right]^- \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]} \\ & + \left( \underline{\phi}^- \mid \left( \underline{\underline{A}}_y n_y - \left[ \Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y \right]^- \right) \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

L'exposant  $H$  symbolise la matrice transconjuguée.

Considérons dans un premier temps uniquement les termes non issus de l'introduction de PML. Nous retrouvons bien le flux de conditions aux limites développé lors de la discrétisation des équations adjointes continues (voir eq. (6.12)) :

$$\underline{\underline{M}}(\beta)^H + \underline{\underline{A}}_j n_j = \underline{\underline{M}}^*(\beta).$$

Le traitement des termes inter-éléments se fait en trois temps :

- Notons tout d'abord l'égalité suivante :

$$\underline{\underline{A}}_j n_j - \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- = \left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^+.$$

- L'idée est alors «d'échanger» le terme en  $\underline{\varphi}^+$  avec l'élément voisin dont la contribution amène alors le terme :

$$\left( \underline{\varphi}^- \mid \left[ -\underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- \underline{\varphi}^{*+} \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]}$$

- Enfin, l'égalité

$$-\left[ \underline{\underline{A}}_j n_j \right]^+ = \left[ -\underline{\underline{A}}_j n_j \right]^-$$

permet de retrouver le terme inter-élément

$$\left( \underline{\varphi}^- \mid \left[ -\underline{\underline{A}}_j n_j \right]^- (\underline{\varphi}^{*+} - \underline{\varphi}^{*-}) \right)_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h \times [0; T]}$$

visible dans la formulation résultant de la discrétisation des équations adjointes continues (eq. (6.11)).



Ainsi, sans PML, l'adjoint du problème direct discrétisé correspond au discrétisé du problème adjoint. Ce résultat démontré précédemment par Ventribout [153, page 109], s'étend facilement au cas avec PML en suivant le même raisonnement et en invoquant les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}^H + \Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y = \underline{\underline{M}}^*, \\ \underline{\underline{A}}_y n_y - [\Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y]^- = [\Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y]^+, \\ -[\Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y]^+ = [-\Sigma' n_y \underline{\underline{A}}_y]^- . \end{cases}$$

Le problème adjoint global s'écrit finalement :

$$\begin{cases} -\underline{\underline{M}} \partial_t \underline{\varphi}^* = -\underline{\underline{R}}^* \underline{\varphi}^* + \underline{\underline{M}}^{pml} \underline{\phi}^*, \\ -\underline{\underline{M}} \partial_t \underline{\phi}^* = -\underline{\underline{R}}_{\phi}^* \underline{\varphi}^*. \end{cases} \quad (6.15)$$

Les correspondances sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}^{pml} \underline{\varphi}^* \longleftrightarrow \int_{D_l \in \Omega_{pml}} \partial_t \underline{\varphi}^* \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega, \\ \underline{\underline{R}}^* \underline{\varphi}^* \longleftrightarrow \int_{D_l} \left( -\underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi}^* + (\underline{\underline{B}}^T - \partial_j \underline{\underline{A}}_j) \underline{\varphi}^* \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ \quad + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} [-\underline{\underline{A}}_j n_j]^- [[\underline{\varphi}^*]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}}^*(\beta) \underline{\varphi}^{*-} \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma, \\ \underline{\underline{R}}_{\phi}^* \underline{\varphi}^* \longleftrightarrow \int_{D_l} \left( -\Sigma' \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi}^* + (\Sigma' \underline{\underline{B}}^T - \Sigma' \partial_y \underline{\underline{A}}_y) \underline{\varphi}^* \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Omega \\ \quad + \int_{\partial D_l \setminus \partial \Omega_h} [-\Sigma' \underline{\underline{A}}_y n_y]^- [[\underline{\varphi}^*]] \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \int_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h} \underline{\underline{M}}^* \underline{\varphi}^{*-} \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma. \end{cases}$$

#### 6.1.2.4 Équations adjointes et PML

Nous cherchons à montrer dans cette section si l'adjoint des équations avec PML correspond à l'application de PML sur les équations adjointes. Pour cela, nous écrivons les équations adjointes eq. (6.9) dans le repère spatio-temporel  $(x; \hat{t})$  en formulation fréquentielle :

$$\begin{aligned} i\hat{\omega}(\underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x) \underline{\varphi}^* - \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\varphi}^* - \left(1 + \frac{\Sigma'}{i\hat{\omega}}\right) \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi}^* + (\underline{\underline{B}}^T - \partial_j \underline{\underline{A}}_j) \underline{\varphi}^* + \frac{\Sigma'}{i\hat{\omega}} (\underline{\underline{B}}^T - \partial_y \underline{\underline{A}}_y) \underline{\varphi}^* &= 0 \\ \Leftrightarrow (\Sigma' + i\hat{\omega})(\underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x) \underline{\varphi}^* - \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\varphi}^* - \left(1 + \frac{\Sigma'}{i\hat{\omega}}\right) \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi}^* + \left(1 + \frac{\Sigma'}{i\hat{\omega}}\right) (\underline{\underline{B}}^T - \partial_y \underline{\underline{A}}_y) \underline{\varphi}^* - \partial_x \underline{\underline{A}}_x \underline{\varphi}^* &= 0 \\ \Leftrightarrow i\hat{\omega}(\underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x) \underline{\varphi}^* - \frac{\underline{\underline{A}}_x}{1 - \frac{i\Sigma'}{\hat{\omega}}} \partial_x \underline{\varphi}^* - \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi}^* + \left( \underline{\underline{B}}^T - \frac{\partial_x \underline{\underline{A}}_x}{1 - \frac{i\Sigma'}{\hat{\omega}}} - \partial_y \underline{\underline{A}}_y \right) \underline{\varphi}^* &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière expression correspond à celle obtenue en appliquant le prolongement analytique

$$x \rightarrow x - i \frac{\Sigma(x)}{\omega}$$

à l'équation :

$$i\hat{\omega}(\underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x) \underline{\varphi}^* - \underline{\underline{A}}_x \partial_x \underline{\varphi}^* - \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi}^* + (\underline{\underline{B}}^T - \partial_x \underline{\underline{A}}_x - \partial_y \underline{\underline{A}}_y) \underline{\varphi}^* = 0 . l$$

En repassant maintenant en domaine temporel dans le repère spatio-temporel  $(x, t)$ , l'équation suivante est obtenue :

$$-\partial_t \underline{\varphi}^* - \underline{\underline{A}}_j \partial_j \underline{\varphi}^* + (\underline{\underline{B}}^T - \partial_j \underline{\underline{A}}_j) \underline{\varphi}^* = 0 .$$

Cette expression correspond bien aux équations adjointes dans le domaine physique, l'adjoint des équations PML correspond donc bien au système d'équations résultant de l'application des PML aux équations adjointes.

## 6.2 Implantation de conditions aux limites PML pour le calcul modal

### 6.2.1 Première formulation

Afin de résoudre un problème d'acoustique modal avec PML, la solution la plus directe consiste à écrire les équations (6.6) et (6.8) en remplaçant  $\partial_t$  par  $-i\omega$ . En utilisant le fait que  $\underline{\underline{R}}_\phi \underline{\underline{P}}^{pml} = \underline{\underline{R}}_\phi$ , le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{R}}_\phi & 0 \\ 0 & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi} \\ i\omega \underline{\varphi} \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} \underline{\underline{R}} & -\underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{I}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi} \\ i\omega \underline{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Il est bien connu que l'écriture d'un problème aux valeurs propres quadratique sous une forme linéaire de vecteur propre  $(\underline{\varphi}; i\omega \underline{\varphi})^T$  a pour conséquences de créer de nombreux modes parasites, nous nous attendons donc à observer de nombreux modes non physiques sur les spectres obtenus puisqu'à ces modes parasites vont s'ajouter les modes de Béranger (voir section 3.2.2.6).

### 6.2.2 Autre formulation

#### 6.2.2.1 Sans écoulement porteur

Nous rappelons, voir section 3.2.2.6, que les études modales avec PML réalisées jusqu'à maintenant ont été menées sans écoulement et avec le prolongement analytique :

$$x \rightarrow x + i\Sigma(x).$$

Les équations s'écrivent alors :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \frac{\underline{\underline{A}}_x}{1 + i\Sigma'} \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_y \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} = 0. \quad (6.17)$$

La matrice  $\underline{\underline{A}}_x n_x / (1 + i\Sigma') + \underline{\underline{A}}_y n_y$ , notée  $\tilde{\underline{\underline{A}}}_j n_j$  admet pour valeurs propres 0 et  $\pm a_0 \sqrt{n_x^2 + n_y^2 (1 + i\Sigma')^2} / (1 + i\Sigma')$ . Le système d'équations aux dérivées partielles n'est donc plus hyperbolique. Il est intéressant de noter que pourtant, l'utilisation d'un flux décentré amont permet de trouver les modes physiques pour les deux configurations présentées ci-dessous en section 6.4.2. Les modes non physiques obtenus sont alors uniquement des modes de Béranger et aucun mode parasite n'est observé.

Le flux décentré amont suit ici la même définition que précédemment :

$$\Pi(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; \underline{n}) = [\tilde{\underline{\underline{A}}}_j n_j]^- \underline{\varphi}^+ + [\tilde{\underline{\underline{A}}}_j n_j]^+ \underline{\varphi}^-,$$

En revanche, pour une matrice  $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{P}} \text{diag}(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) \underline{\underline{P}}^{-1}$  :

$$[\underline{\underline{M}}]^\pm = \frac{\underline{\underline{M}} \pm |\underline{\underline{M}}|}{2} \quad (6.18)$$

avec :

$$|\underline{\underline{M}}| = \underline{\underline{P}} \text{diag}(|\lambda_1|; |\lambda_2|; |\lambda_3|) \underline{\underline{P}}^{-1}.$$

#### 6.2.2.2 Avec écoulement porteur

En présence d'écoulement porteur l'utilisation d'une transformation spatio-temporelle est nécessaire pour s'affranchir des possibles instabilités (voir section 3.2.2.2). Le prolongement analytique

$$x \rightarrow x + i\Sigma(x).$$

est alors appliqué à l'équation (3.28) obtenue après application de la transformation spatio-temporelle dans le domaine fréquentiel :

$$-i\omega \left( \underline{\underline{I}} + \tau \underline{\underline{A}}_x \right) \underline{\varphi} + \frac{\underline{\underline{A}}_x}{1 + i\Sigma'} \partial_x \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_y \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} = 0.$$

Cette dernière équation s'écrit dans le domaine spatio-temporel initial :

$$-i\omega \left( \underline{\underline{I}} + \frac{i\tau\Sigma'}{1+i\Sigma'} \underline{\underline{A}}_x \right) \underline{\varphi} + \frac{\underline{\underline{A}}_x}{1+i\Sigma'} \partial_x \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi} + \underline{\underline{B}} \underline{\varphi} = 0. \quad (6.19)$$

L'équation différentielle eq. (6.19) n'étant pas hyperbolique l'utilisation d'un flux décentré amont n'est a priori pas justifiée. Il serait néanmoins intéressant d'étudier si comme dans le cas sans écoulement, la définition d'un flux décentré amont par eq. (6.18) permet de retrouver les mêmes modes physiques qu'en utilisant la formulation présentée en section 6.2.1. Cette formulation requiert une étude approfondie pour définir un flux numérique adapté.

À ce stade de développement du code EMILE, seule la formulation présentée en section 6.2.1 a été retenue, bien qu'ayant pour inconvénients l'augmentation du nombre de points de calculs et la présence de modes parasites. À l'avenir, il serait intéressant d'étudier et de tester l'utilisation de la formulation eq. (6.19).

## 6.3 Schémas temporels

Dans cette section sont présentés les principaux schémas temporels utilisés lors de ce travail de thèse.

### 6.3.1 Schéma explicite

L'utilisation de schémas temporels explicites en combinaison avec un schéma temporel Galerkin discontinu est relativement aisée du fait de la structure diagonale par blocs de la matrice de masse. Trois schémas explicites ont été implantés dans la version séquentielle du code utilisée comme moyen de test :

- schéma Runge-Kutta explicite d'ordre 2 (RK2),
- schéma Runge-Kutta explicite d'ordre 4 (RK4),
- schéma LSERK («Low-Storage Explicit Runge-Kutta») d'ordre 4 [37] dont la combinaison avec un schéma spatial Galerkin discontinu est conseillée par Hesthaven et Warburton [69, section 3.4].

Seul le schéma RK2 a été implanté dans la version parallélisée du code.

#### 6.3.1.1 Stabilité du schéma

Si un schéma explicite est choisi, le choix est laissé à l'utilisateur entre la déclaration de la valeur du pas de temps ou du nombre CFL. Si ce dernier est déclaré, le pas de temps est donné par :

$$\Delta t = \min_{l \in \llbracket 1; L \rrbracket} \frac{r(D_l) CFL}{a_0 + \max_{i \in \llbracket 1; N \rrbracket} ||\underline{U}_{0_i}^l||}, \quad (6.20)$$

où  $\underline{U}_{0_i}^l$  est le vecteur vitesse de l'écoulement porteur au  $i$ -ième point de contrôle du triangle  $D_l$  et  $r(D_l)$  est le rayon du cercle inscrit du triangle  $D_l$  donné par la formule

$$r(D_l) = \frac{2\mathcal{A}(D_l)}{\mathcal{P}(D_l)},$$

$\mathcal{A}(D_l)$  et  $\mathcal{P}(D_l)$  étant respectivement l'aire et le périmètre du triangle  $D_l$ . L'utilisation du rayon du cercle inscrit est courant dans les méthodes des éléments finis et volumes finis. D'autres grandeurs auraient pu être utilisées comme mesure d'un triangle : la taille du côté le plus petit, la taille du côté du triangle équilatéral de même aire, le rayon du cercle circonscrit ou encore la plus petite hauteur du triangle [152].

Afin de déterminer la limite de stabilité, la valeur propre dominante  $\omega_\lambda$  de l'opérateur  $\underline{\underline{T}}(\Delta t)$  est calculée, le pas de temps  $\Delta t$  étant donné par l'équation (6.20). Nous rappelons que  $\underline{\underline{T}}$  est l'opérateur d'évolution temporelle (défini précédemment en section 2.1.2). Le calcul est effectué par la méthode de la puissance itérée pour des valeurs croissantes du nombre CFL jusqu'à observer le passage de  $\omega_\lambda < 1$  à  $\omega_\lambda \geq 1$  traduisant la déstabilisation du schéma.

Les calculs ont été effectués pour un conduit traversé par un écoulement de Poiseuille de nombre de Mach moyen  $\bar{M} = 0,2$  borné en amont et en aval par des domaines PML. Une première série de calculs

| Liner | RK2  | RK4  | LSERK |
|-------|------|------|-------|
| Sans  | 0,50 | 0,70 | 0,95  |
| Avec  | 0,35 | 0,50 | 0,85  |

TABLE 6.1 – Valeurs limites du nombre CFL assurant la stabilité.

est effectuée sur des maillages plus ou moins raffinés dans le cas où toutes les parois sont rigides puis une deuxième série de calculs est menée dans le cas où un liner est placé sur une portion de la paroi inférieure. La valeur limite du nombre CFL assurant la stabilité ne semble que très peu influencée par le pas de maillage, les valeurs obtenues sont données tableau 6.1. Il est observé que la présence du liner a un effet déstabilisant, probablement à cause des discontinuités de conditions aux limites aux ruptures d'impédances. Comme attendu, le schéma LSERK permet l'utilisation de pas de temps bien plus élevés [37].

À ce stade de développement du code, la possibilité de définir un pas de temps local n'a pas été implantée dans le code **EMILE**. À l'avenir, il serait intéressant d'implanter cette fonctionnalité permise par la formulation Galerkin discontinue et cruciale pour effectuer des calculs sur des maillages composés de triangles de tailles diverses (comme ce sera le cas au chapitre 8). De plus, il pourrait être judicieux de n'utiliser à l'avenir que le schéma LSERK, ce dernier alliant précision et stabilité.

### 6.3.2 Schéma implicite

Plutôt qu'implanter la possibilité de définir le pas de temps localement, il a été choisi de s'intéresser à l'utilisation de la méthode implicite Crank-Nicolson (ordre deux).

#### 6.3.2.1 Formulation du problème direct

Les équations du problème direct s'écrivent (eqs. (6.6) et (6.8)) :

$$\begin{pmatrix} -\underline{\underline{M}} & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{M}} \end{pmatrix} \partial_t \underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{R}} & \underline{\underline{R}}_\phi \\ -\underline{\underline{M}}^{pml} & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}},$$

où  $\underline{\underline{\Phi}} = (\varphi; \phi)^T$  et  $\underline{\underline{M}}^{pml}$  est la matrice diagonale par bloc dont les blocs sont nuls s'ils correspondent au domaine physique et à la matrice de masse s'ils correspondent au domaine PML. Le schéma temporel Crank-Nicolson s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\underline{\underline{M}} & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{M}} \end{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} -\underline{\underline{M}} & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{M}} \end{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} \underline{\underline{R}} & \underline{\underline{R}}_\phi \\ -\underline{\underline{M}}^{pml} & 0 \end{pmatrix} (\underline{\underline{\Phi}}(t + \Delta t) + \underline{\underline{\Phi}}(t)),$$

soit

$$\begin{pmatrix} -\underline{\underline{M}} - \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}} & -\frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}}_\phi \\ \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{M}}^{pml} & -\underline{\underline{M}} \end{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} -\underline{\underline{M}} + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}} & \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}}_\phi \\ -\frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{M}}^{pml} & -\underline{\underline{M}} \end{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}(t).$$

Une inversion par blocs<sup>3</sup> donne<sup>4</sup> :

$$\begin{pmatrix} -\underline{\underline{M}} - \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}} & -\frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}}_\phi \\ \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{M}}^{pml} & -\underline{\underline{M}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{\underline{L}}}^{-1} \underline{\underline{L}} & \frac{\Delta t}{2} \tilde{\underline{\underline{L}}}^{-1} \underline{\underline{R}}_\phi \\ \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{P}}^{pml} \tilde{\underline{\underline{L}}}^{-1} \underline{\underline{L}} + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{P}}^{pml} & \underline{\underline{I}} + \frac{\Delta t^2}{2} \underline{\underline{P}}^{pml} \tilde{\underline{\underline{L}}}^{-1} \underline{\underline{R}}_\phi \end{pmatrix},$$

3. Si  $\underline{\underline{A}}_4$  et  $\underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_4^{-1} \underline{\underline{A}}_3$  sont inversibles alors :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_1 & \underline{\underline{A}}_2 \\ \underline{\underline{A}}_3 & \underline{\underline{A}}_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left( \underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_4^{-1} \underline{\underline{A}}_3 \right)^{-1} & - \left( \underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_4^{-1} \underline{\underline{A}}_3 \right)^{-1} \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_4^{-1} \\ - \underline{\underline{A}}_4^{-1} \underline{\underline{A}}_3 \left( \underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_4^{-1} \underline{\underline{A}}_3 \right)^{-1} & \underline{\underline{A}}_4^{-1} + \underline{\underline{A}}_4^{-1} \underline{\underline{A}}_3 \left( \underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_4^{-1} \underline{\underline{A}}_3 \right)^{-1} \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

4. Les égalités  $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{M}}^{pml} = \underline{\underline{P}}^{pml}$  et  $\underline{\underline{R}}_\phi \underline{\underline{P}}^{pml} = \underline{\underline{R}}_\phi$  sont utilisées.

où  $\tilde{\underline{\underline{L}}} = -\underline{\underline{M}} - \frac{\Delta t}{2} (\underline{\underline{R}} + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}}_\phi)$  et  $\dot{\underline{\underline{L}}} = -\underline{\underline{M}} + \frac{\Delta t}{2} (\underline{\underline{R}} + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{R}}_\phi)$ . Et ainsi :

$$\begin{cases} \underline{\varphi}(t + \Delta t) = \tilde{\underline{\underline{L}}}^{-1} \left( \dot{\underline{\underline{L}}} \underline{\varphi}(t) + \Delta t \underline{\underline{R}}_\phi \underline{\phi}(t) \right) , \\ \underline{\phi}(t + \Delta t) = \underline{\phi}(t) + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{P}}^{pml} (\underline{\varphi}(t) + \underline{\varphi}(t + \Delta t)) . \end{cases}$$

### 6.3.2.2 Formulation du problème adjoint

Les équations adjointes s'écrivent sous la forme du système (voir eq. (6.15)) :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{M}} \end{pmatrix} - \partial_t \underline{\underline{\Phi}}^* = \begin{pmatrix} -\underline{\underline{R}}^* & \underline{\underline{M}}^{pml} \\ -\underline{\underline{R}}_\phi^* & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\Phi}}^* .$$

En suivant la même procédure que pour le problème direct, les égalités suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \underline{\varphi}^*(t + \Delta t) = \tilde{\underline{\underline{L}}}^{*-1} \left( \dot{\underline{\underline{L}}}^* \underline{\varphi}^*(t) + \Delta t \underline{\underline{M}}^{pml} \underline{\phi}^*(t) \right) , \\ \underline{\phi}^*(t + \Delta t) = \underline{\phi}^*(t) + \frac{\Delta t}{2} (-\underline{\underline{M}})^{-1} \underline{\underline{R}}_\phi^* (\underline{\varphi}^*(t) + \underline{\varphi}^*(t + \Delta t)) , \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{\underline{\underline{L}}}^* = \underline{\underline{M}} + \frac{h}{2} \left( \underline{\underline{R}}^* + \frac{h}{2} \underline{\underline{R}}_\phi^* \right) , \\ \dot{\underline{\underline{L}}}^* = \underline{\underline{M}} - \frac{h}{2} \left( \underline{\underline{R}}^* + \frac{h}{2} \underline{\underline{R}}_\phi^* \right) . \end{cases}$$

### 6.3.2.3 Mise en œuvre

L'inversion par blocs des matrices permet de se restreindre à l'inversion de matrices plus petites. Les trois matrices à inverser sont ainsi  $\tilde{\underline{\underline{L}}}$ ,  $\dot{\underline{\underline{L}}}$  et  $\underline{\underline{M}}$ , l'inversion de cette dernière étant aisée. L'inversion des matrices  $\tilde{\underline{\underline{L}}}$  et  $\dot{\underline{\underline{L}}}^*$  se fait au moyen de la librairie MUMPS et est donc parallèle.

Lors de calculs de propagation directe ou de croissances transitoires, les instants auxquels la solution est demandée sont modifiés afin d'être des multiples du pas de temps. Ainsi seule une étape d'inversion est nécessaire.

## 6.4 Validations et illustrations

### 6.4.1 Utilisation des PML pour la propagation acoustique en domaine temporel

Dans cette section est illustrée l'utilisation des PML au travers d'un exemple simple. Soit un conduit de hauteur  $H = 5$  cm traversé par un écoulement de Poiseuille de Mach moyen  $M = 0,2$ , la perturbation acoustique est initialisée à l'instant  $t = 0$  par une perturbation Gaussienne sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  de largeur  $b = 3H/100$ , centrée en  $(-H/4; 0)$  et d'amplitude unitaire définie par eq. (6.21)[117] et représentée figure 6.2.

$$\begin{cases} a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; y; t = 0) = e^{-\alpha[(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2]} , \\ \alpha = \ln(2)/b . \end{cases} \quad (6.21)$$

Afin d'illustrer d'une part l'absorption des ondes acoustiques dans les couches PML et d'autre part la non-réflexion des ondes aux interfaces entre le domaine physique et les couches PML, deux séries de calcul sont effectuées. La première est réalisée en prenant un domaine physique compris entre  $x = -H/2$  et  $x = H/2$  et en plaçant en amont et aval de ce domaine physique des couches PML de largeur  $H/2$  et de paramètres  $\sigma_0 H/a_0 = 20$  et  $\beta = 1$  (valeurs utilisées par Hu [73]). La deuxième série de calcul est menée en considérant uniquement un domaine physique délimité par  $x = -3H/2$  et  $x = 3H/2$  sans couches PML. Les deux maillages utilisés dans les deux cas sont de pas constant  $H/70$ . Le champ acoustique de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  est calculé dans les deux cas à des instants  $t a_0/H = \{0,41; 0,54; 0,68; 1,02; 1,36\}$  choisis tels

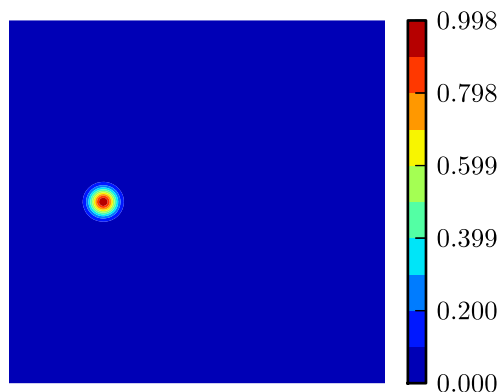


FIGURE 6.2 – Perturbation Gaussienne imposée à  $t = 0$ , tracé du champ  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  dans la région  $x \in [-H/2; H/2]$ .

que la perturbation acoustique ait atteint un des domaines PML dans le premier calcul mais ne soit pas encore arrivée aux parois amont et aval dans le deuxième calcul.

Figure 6.3 sont tracés les champs obtenus. Les lignes pointillées placées en  $x = \pm H/2$  représentent les interfaces entre le domaine physique et les couches PML utilisées pour la première série de calcul. Il est observé que ces couches PML permettent bien l'atténuation des ondes. De plus, les champs obtenus dans les deux cas sont en bon accord dans la région  $|x| \leq H/2$  ce qui illustre la non-réflexion des ondes à la jonction entre le domaine physique et les couches PML même pour des ondes non normales à l'interface.

## 6.4.2 Validation des PML pour le calcul modal

### 6.4.2.1 Validations pour le calcul modal

La validation de l'implémentation des PML pour le calcul modal passe par la définition d'un cas de calcul permettant de comparer les résultats numériques à une solution de référence. Contrairement au cas d'un conduit fermé, il n'existe que très peu de configurations pour lesquelles une solution analytique est connue dans le cas d'un conduit ouvert. Notamment en présence d'écoulement, il n'existe, à notre connaissance, aucune configuration qui puisse être résolue analytiquement.

Hein et collab. [65] ont proposé une solution analytique à l'équation d'Helmholtz pour une configuration où l'inhomogénéité en  $x$  est créée par des couches où la célérité du son est différente. Ce cas n'étant pas directement applicable au code EMILE, nous proposons ici une autre configuration menant à l'obtention d'une solution semi-analytique. Soit un conduit ouvert de hauteur  $H$  où sont placées en  $x = \pm L = \pm H/2$  deux parois de résistance  $R = 4$  (modélisées une condition de Darcy, l'implantation de celle-ci est développée en détails en section 7.2.1), voir figure 6.4.

Le calcul d'un mode résonant  $(m; n)$  est détaillé en annexe B.2.2. Deux calculs sont effectués avec pour cibles  $\sigma H/a_0 = 3,2$  et  $\sigma H/a_0 = 6,6$ . Les paramètres des domaines PML sont :

- Position des couches PML :  $x_0^g = -x_0^d = 2L$  ;
- Exposant de la fonction  $\Sigma$  :  $\beta = 1$  ;
- Coefficient :  $\sigma_0 H/a_0 = 20,6$  ;
- Taille des couches PML :  $d = H/2$ .

Figure 6.5(a) sont tracés les spectres ainsi obtenus ainsi que les pulsations propres données par la solution semi-analytique. L'utilisation des PML permet de retrouver ces modes numériquement. En revanche, force est de constater que le spectre admet de nombreux modes non physiques : soit parasites soit de Bérenger, ces derniers formant des branches continues partant des fréquences de coupure  $\omega = a_0 n \pi / H$   $n \in \llbracket 1; \infty \rrbracket$ . Les modes parasites semblent dépendre fortement de la cible de la transformation shift-invert (notée  $\sigma$ ). En effet le calcul pour  $\sigma H/a_0 = 6,6$  fait apparaître des modes parasites qui n'existent pas dans le cas du calcul pour  $\sigma H/a_0 = 3,2$ . À titre d'exemples, nous traçons figures 6.6(a) et (b) les champs  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  des modes propres de valeurs propres associées  $\omega H/a_0 = 6,26 - 0.03i$

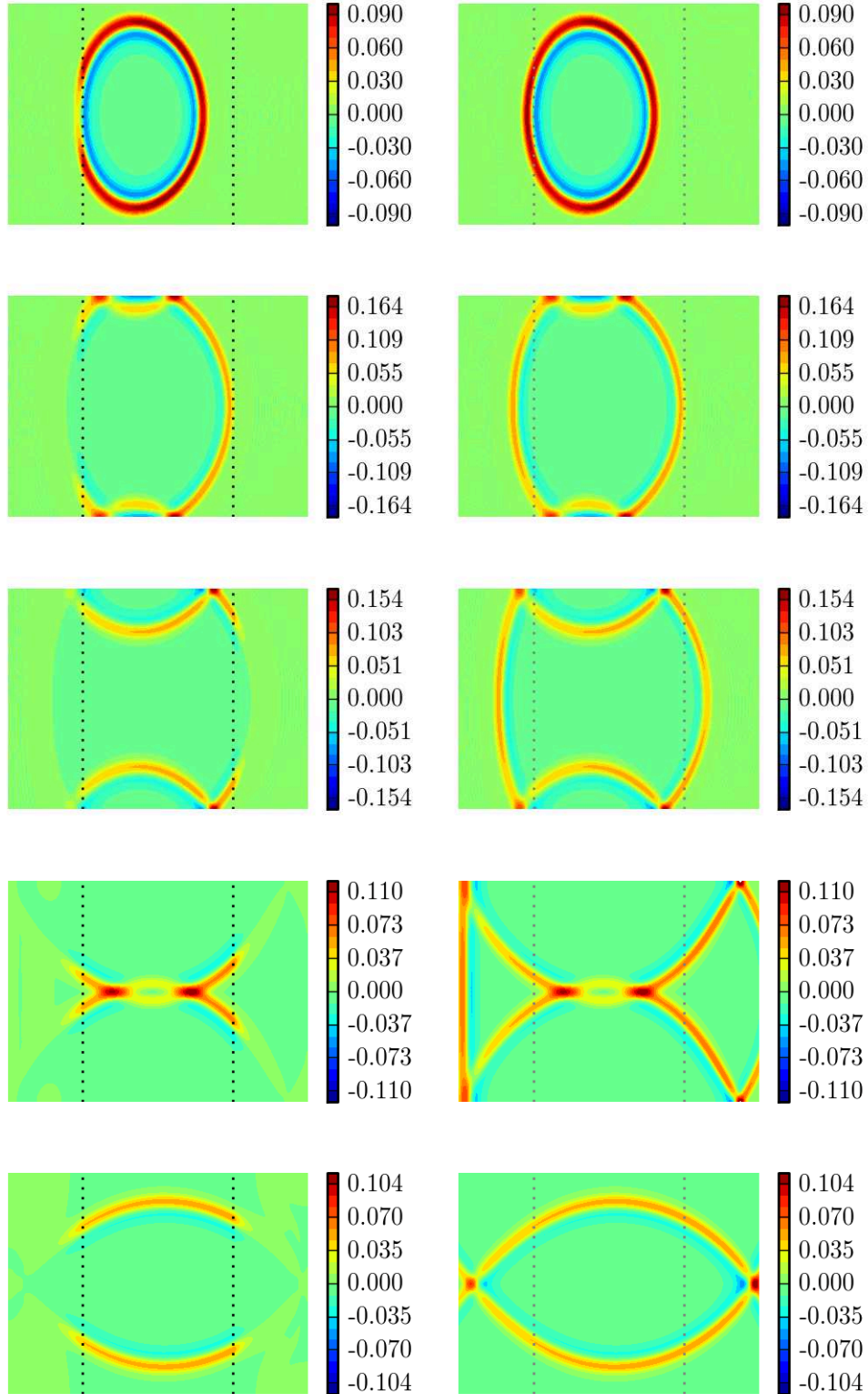


FIGURE 6.3 – Comparaison des champs de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenus aux instants  $t a_0 / H = \{0.41; 0.54; 0.68; 1.02; 1.36\}$  obtenus avec (à gauche) et sans couches PML (à droite) dans la région délimitée  $|x| \leq H$ .

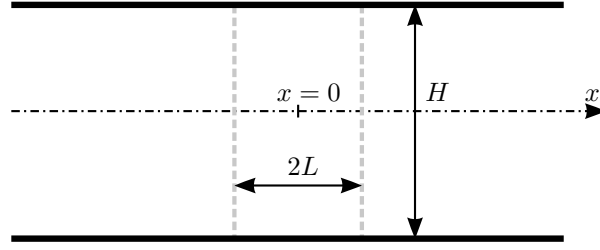


FIGURE 6.4 – Configuration de validation, les deux segments gris en pointillé représentent des plaques perforées.

et  $\omega H/a_0 = 3,65 - 0,19i$  correspondant respectivement à un mode de Béranger et à un mode parasite.

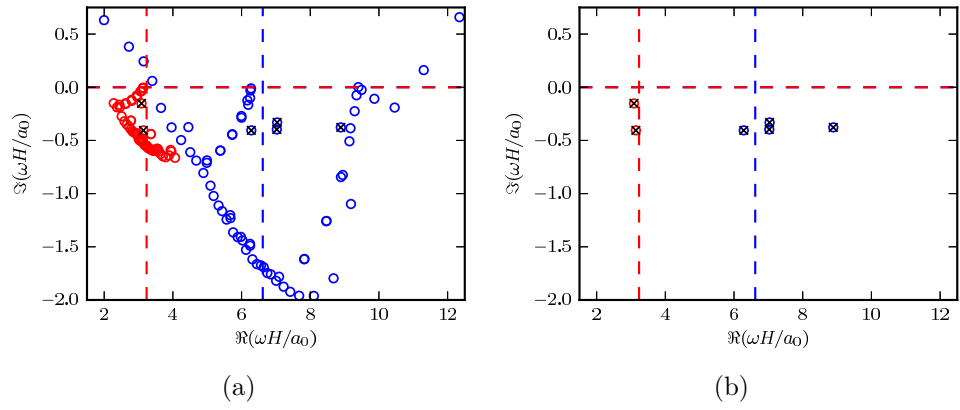


FIGURE 6.5 – Pulsations propres obtenues pour  $\sigma H/a_0 = 3,2$  (en rouge) et  $\sigma H/a_0 = 6,6$  (en bleu)(a). Les valeurs des cibles sont représentées par les traits pointillés. Les croix représentent les pulsations obtenues semi-analytiquement. Illustration de l'effet du filtrage (b).

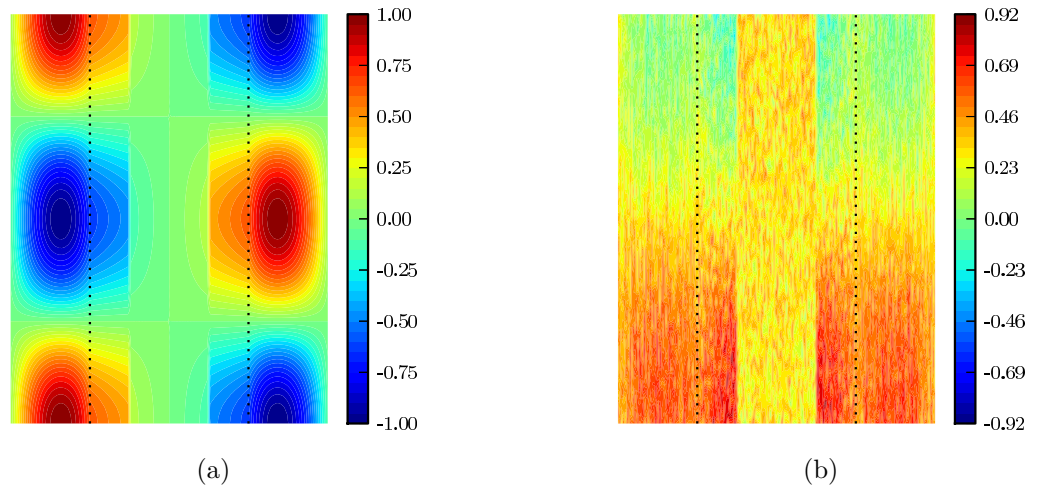


FIGURE 6.6 – Fonctions propres  $\Re\left(a_0 \frac{\rho}{\rho_0}\right)$  d'un mode de Béranger (a) et d'un mode parasite (b). Les lignes pointillés correspondent aux interfaces entre le domaine physique et les couches PML.

Afin de s'affranchir d'une partie des modes non physiques, nous filtrons les modes d'après le critère proposé par Shi et collab. [142]. Un mode est gardé si l'énergie de la fonction propre associée, composée



de l'énergie dans le domaine physique  $E_{phy}$  et de l'énergie dans les couches PML  $E_{pml}$ , satisfait :

$$\frac{E_{phy}}{E_{phy} + E_{pml}} \geq \gamma \quad (6.22)$$

où l'on a fixé  $\gamma = 0,8$ . D'après la définition de l'énergie retenue dans le cadre de cette thèse (eq. (2.21)), l'énergie  $E_{pml}$  est définie par :

$$E_{pml} = \int_{\Omega_{pml}} \underline{\varphi} \cdot \overline{\underline{\varphi}} \, d\Omega$$

Les valeurs propres des modes retenus après cette opération sont tracées figure 6.5(b). Seuls les modes physiques ont été retenus, le critère proposé par Shi et collab. [142] est donc bien adapté à ces calculs.

#### 6.4.2.2 Calcul de modes acoustiques résonants

Afin d'illustrer l'utilisation de conditions aux limites PML pour le calcul de modes acoustiques résonants, nous nous intéressons au calcul modal dans un conduit de hauteur  $H/2$  présentant une cavité de largeur  $L$  et de hauteur  $h$ , voir figure 6.7(a). Cette configuration a été étudiée précédemment par Koch [84].

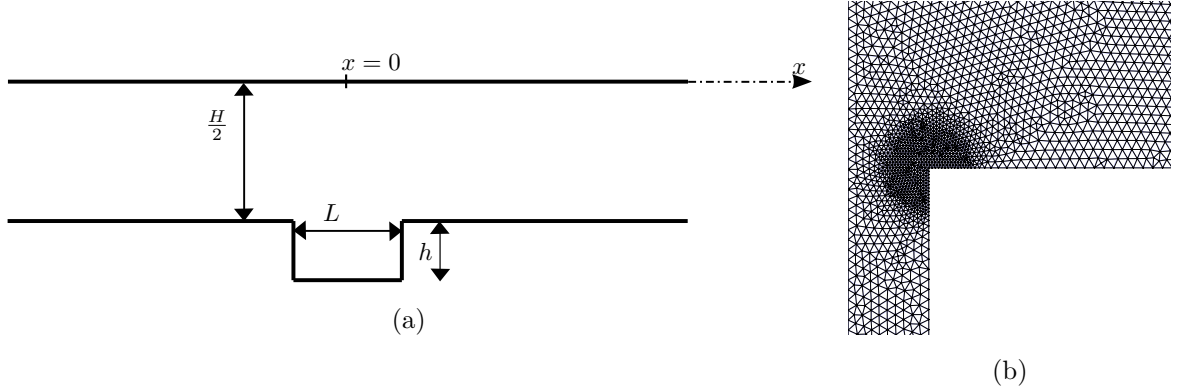


FIGURE 6.7 – Cavité en conduit et zoom sur le maillage autour du coin de la marche ( $x = L/2; y = 0$ ).

La géométrie étant symétrique autour de  $x = 0$ , seul le domaine  $x \geq 0$  est étudié et des conditions de symétrie ou d'antisymétrie sont imposées en  $x = 0$ . Les valeurs des paramètres géométriques sont  $L = H/3$ ,  $h = H$  et les paramètres des PML sont  $x_0 = 4L$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma_0 = 20,6$  et  $d = 2L$ . Le maillage est construit en imposant un pas global de maillage  $\Delta h = H/50$  et un raffinement local autour du coin de la marche, voir figure 6.7(b). Afin de retrouver les trois modes acoustiques résonants trouvés pour cette configuration par Koch [84], nous effectuons trois calculs pour  $\sigma L / (2\pi a_0) \in \{0,30; 0,50; 1,50\} + 0,01i$ . Le calcul pour  $\sigma L / (2\pi a_0) = 0,30 + 0,01i$  est effectué en imposant une condition de symétrie sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  en  $x = 0$  tandis que pour les deux autres calculs, une condition d'antisymétrie est imposée sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ .

Sur les figures 6.8(a) et (b) sont tracés les trois spectres de pulsations propres respectivement avant et après filtrage, celui-ci étant effectué en suivant la même opération que celle décrite dans la section précédente (section 6.4.2.1). Avant filtrage, le spectre est pollué par un nombre important de modes non physiques et son étude d'un point de vue physique n'est pas évidente. L'opération de filtrage permet de s'affranchir de la plupart des modes non physiques. En regardant les fonctions propres des modes restants, nous observons que seuls les modes dont les valeurs propres associées satisfont  $\Im(\omega L / (2\pi a_0)) < -0,02$  sont non physiques. Les fonctions propres associées à ces modes non physiques montrent que ce sont des modes de Bérenger, elles sont quasi nulles dans l'ensemble du domaine de calcul et existent principalement au voisinage de l'interface entre le domaine physique et le domaine PML. À l'avenir, il serait intéressant de développer un processus de filtrage permettant de s'affranchir de ces modes non physiques qui n'ont pas été éliminés par le filtrage proposé par Shi et collab. [142].

Figures 6.9(a),(b) et (c) sont représentés respectivement les champs  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  correspondant aux modes de valeurs propres  $\omega L / (2\pi a_0) = 0,30 - 3,8 \times 10^{-3}i$ ,  $\omega L / (2\pi a_0) = 0,51 - 1,7 \times 10^{-3}i$  et  $\omega L / (2\pi a_0) = 1,50 - 4,5 \times 10^{-4}i$ . Ces trois modes sont des modes acoustiques résonants précédemment trouvés par

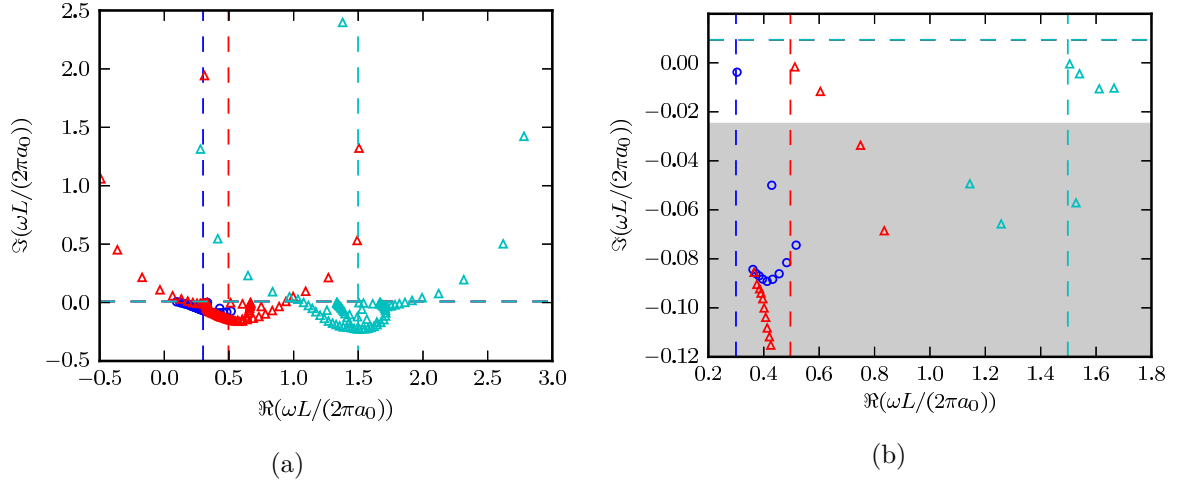


FIGURE 6.8 – Pulsations propres obtenues pour  $\sigma L/(2\pi a_0) = 0,30 + 0,01i$  ( $\circ$ ),  $\sigma L/(2\pi a_0) = 0,50 + 0,01i$  ( $\triangle$ ) et  $\sigma L/(2\pi a_0) = 1,50 + 0,01i$  ( $\triangle$ ) avant (a) et après filtrage (b). Les cercles correspondant aux valeurs propres obtenues en imposant une condition de symétrie sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  en  $x = 0$  tandis que les triangles correspondent à une condition d'antisymétrie. Les lignes pointillées correspondent aux cibles. Sur la figure (b), les valeurs propres se trouvant dans la zone grisée correspondent à des modes de Béranger qui n'ont pas été filtrés.

Koch [84, figure 8(a)]. Nous montrons ainsi la capacité du code **EMILE** à calculer des modes acoustiques résonants en absence d'écoulement.

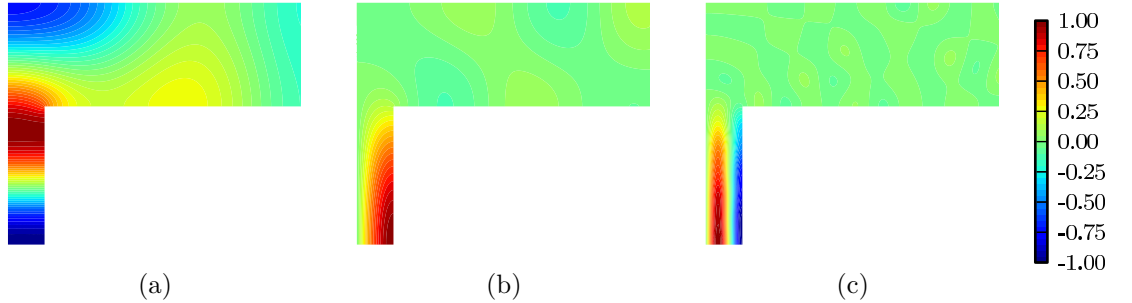


FIGURE 6.9 – Champs  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  des modes acoustiques résonants de pulsations propres  $\omega L/(2\pi a_0) = 0,30 - 3,8 \times 10^{-3}i$  (a),  $\omega L/(2\pi a_0) = 0,51 - 1,7 \times 10^{-3}i$  (b) et  $\omega L/(2\pi a_0) = 1,50 - 4,5 \times 10^{-4}i$  (c).

## CHAPITRE 7

# DÉFINITION ET IMPLANTATION D'UN MODÈLE DE LINER POUR L'ANALYSE MODALE TEMPORELLE ET LE CALCUL EN DOMAINE TEMPOREL

Les analyses modales temporelles ainsi que les études de stabilité non modale effectuées lors de ce travail de thèse nécessitent de définir une méthode pour modéliser la condition aux limites d'impédance. En effet, l'impédance étant généralement une fonction non linéaire de la fréquence, l'analyse modale temporelle implique la résolution d'un problème aux valeurs propres non linéaire. Une telle résolution, bien que possible, nécessite un effort numérique important et il est préférable de privilégier une méthode où le problème aux valeurs propres reste linéaire. D'autre part, comme nous l'avons vu au chapitre 2.4, l'étude de stabilité non modale par recherche de la perturbation initiale optimale consiste en pratique en l'intégration temporelle des problèmes direct et adjoint. L'impédance étant définie en domaine fréquentiel, cette intégration temporelle nécessite de modéliser l'impédance en domaine temporel. Nous présentons dans ce chapitre le modèle de liner retenu applicable aussi bien à l'analyse modale temporelle qu'à l'étude en domaine temporel (donc à la recherche de la perturbation initiale optimale). L'implantation de ce modèle dans le code **EMILE** est ensuite développée puis une étude de validation est présentée.

### Sommaire

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>7.1</b> | <b>Méthode choisie pour la modélisation des liners</b>            | <b>114</b> |
| <b>7.2</b> | <b>Implantation de la méthode de Sbardella et collab.</b>         | <b>115</b> |
| 7.2.1      | Implantation de la condition de Darcy                             | 115        |
| 7.2.2      | Résolution 1D   | 119        |
| <b>7.3</b> | <b>Extension de la méthode de Sbardella et collab.</b>            | <b>121</b> |
| 7.3.1      | Opérateur adjoint :   | 122        |
| 7.3.2      | Validations   | 122        |
| <b>7.4</b> | <b>Application au modèle d'impédance de Aurégan et Leroux [6]</b> | <b>123</b> |
| 7.4.1      | Détermination des paramètres et évaluation de l'erreur            | 123        |
| 7.4.2      | Amélioration de l'approximation de l'impédance du liner           | 125        |
| <b>7.5</b> | <b>Vers de futures extensions</b>                                 | <b>127</b> |
| 7.5.1      | Ajout de la réactance de masse                                    | 127        |
| 7.5.2      | Ajout du terme $\phi$   | 128        |
| 7.5.3      | Autres modifications  | 128        |

## 7.1 Méthode choisie pour la modélisation des liners

L'étude modale temporelle, consistant à chercher la pulsation complexe comme valeur propre des équations d'Euler linéarisées, pose problème dans le cas d'une étude en présence d'un traitement acoustique. En effet, l'impédance caractérisant ce dernier étant généralement une fonction non linéaire de la pulsation, le problème aux valeurs propres à résoudre est non linéaire :

$$\underline{\underline{D}}(\omega)\underline{\underline{\varphi}} = i\omega\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\varphi}}.$$

Si des méthodes itératives pour la résolution de problèmes aux valeurs propres de grandes tailles non linéaires existent [154], il paraît plus judicieux d'un point de vue numérique de passer par le modèle proposé par Sbardella et collab. [138] et présenté en section 2.2.3.3. Il est rappelé que celui-ci consiste à intégrer les cavités du liner dans le domaine de calcul en les modélisant par des éléments unidimensionnels et à modéliser la plaque perforée à l'interface entre les éléments unidimensionnels et le domaine représentant le conduit en imposant la condition (rappel eq. (2.18))

$$\tilde{R}_t = \frac{p_d - p_l}{v_l} \quad (7.1)$$

avec (rappel eq. (2.19))

$$\tilde{R}_t = \tilde{R}_l + \tilde{R}_n \left| \frac{v_l}{a_0} \right|$$

où l'indice  $l$  correspond aux cavités et l'indice  $d$  correspond au conduit. Ce travail de thèse étant restreint au domaine linéaire, la propagation dans les cavités est modélisée par les équations d'Euler linéarisées et la condition eq. (7.1) est linéarisée en prenant  $R = R_t = R_l$ , c'est-à-dire  $R_n = 0$ . La condition eq. (7.1) se simplifie en la condition (7.2), dite de Darcy, reliant le saut de pression de part et d'autre de la plaque perforée à la vitesse normale, continue au travers de la plaque perforée.

$$R = \frac{a_0 \left. \frac{\rho}{\rho_0} \right|_d - a_0 \left. \frac{\rho}{\rho_0} \right|_l}{\underline{u} \cdot \underline{n}} \quad (7.2)$$

Le principe de la méthode est schématisée figure 7.1.

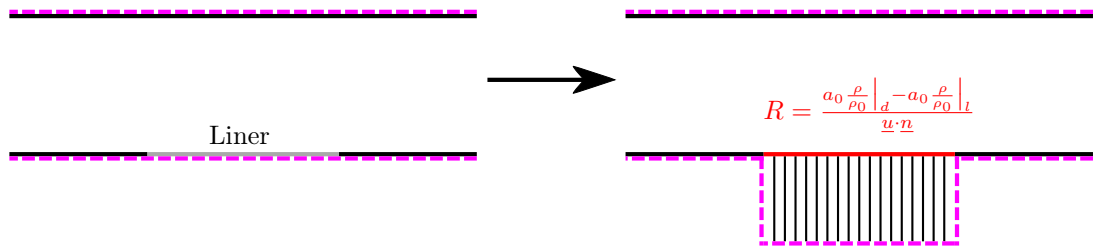


FIGURE 7.1 – Modélisation d'un liner par la méthode de Sbardella et collab. : ajout d'éléments unidimensionnels dans le domaine de calcul modélisant les cavités du liner et modélisation de la plaque perforée par une condition de Darcy eq. (7.2). Les lignes pointillées représentent le domaine de calcul.

Ainsi, sans explicitement faire apparaître la fréquence, cette méthode permet de modéliser un liner d'impédance suivant le modèle du résonateur d'Helmholtz :

$$Z(\omega) = R + i \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} \right).$$

De plus, cette méthode permet le calcul en domaine temporel de la propagation acoustique en présence de traitement acoustique et sera aussi utilisée lors des intégrations en temps nécessaires au calcul de la perturbation initiale optimale.

Les études menées dans ce travail de thèse se limitent aux géométries où le traitement acoustique est appliqué sur la paroi inférieure horizontale du conduit. L'implantation de la méthode de Sbardella et collab. n'a été effectuée que pour traiter ce type de géométrie et ne permet pas, par exemple, de s'intéresser au cas où un liner est placé sur la paroi supérieure du conduit. L'extension de la méthode à d'autres géométries ne pose pas de problème d'un point de vue théorique mais nécessite un travail approfondi d'implantation dans le code.

## 7.2 Implantation de la méthode de Sbardella et collab.

### 7.2.1 Implantation de la condition de Darcy

Dans cette section, nous présentons l'implantation de la condition de Darcy modélisant, en première approximation, une plaque perforée de résistance  $R^1$ . Nous considérons ici que la plaque perforée sépare deux régions bidimensionnelles. Le cas d'une plaque perforée séparant un conduit de cavités de liner unidimensionnelles correspond à une simplification de ce cas général et sera présenté en section 7.2.2.

Soient deux triangles du maillage  $D_l$  et  $D_{l'}$  voisins et appartenant à deux régions séparées par une plaque perforée de résistance  $R$ , voir figure 7.2. Soit  $D_l$  l'élément courant sur lequel nous cherchons à exprimer l'expression du flux numérique  $\Pi(\varphi^-; \varphi^+; \underline{n})$  à introduire dans l'équation (3.5) pour imposer la condition de Darcy :

$$R = \frac{\left[ \left[ a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right]}{\underline{u} \cdot \underline{n}} \text{ avec } \underline{u} \cdot \underline{n} = \underline{u}^- \cdot \underline{n} = \underline{u}^+ \cdot \underline{n} .$$

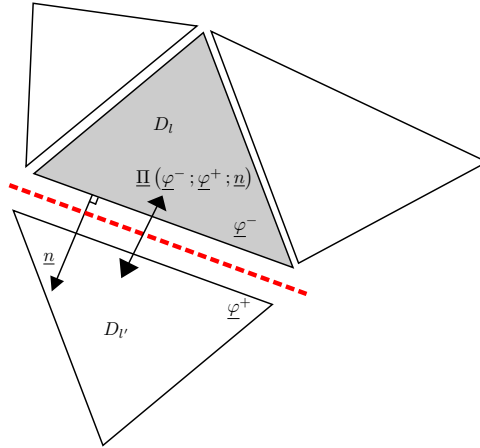


FIGURE 7.2 – Représentation de la séparation des éléments du maillage  $D_l$  et  $D_{l'}$  par une plaque perforée.

Le flux numérique  $\Pi(\varphi^-; \varphi^+; \underline{n})$  est défini comme un flux centré entre la trace intérieure et une trace fictive notée  $\varphi^d$  qui peut être vue comme la valeur de  $\varphi$  «entre le triangle  $D_l$  et la plaque perforée». Cette trace  $\varphi^d$  est définie telle que :

$$\begin{cases} \underline{u}^d \cdot \underline{n} = \underline{u}^+ \cdot \underline{n} \\ a_0 \frac{\rho^d}{\rho_0} = a_0 \frac{\rho^+}{\rho_0} + R \frac{\underline{u}^- \cdot \underline{n} + \underline{u}^+ \cdot \underline{n}}{2} . \end{cases}$$

Le terme de flux dans eq. (3.5) s'écrit finalement :

$$\Pi(\varphi^-; \varphi^+; \underline{n}) - \underline{A}_j n_j \varphi^- = \frac{1}{2} \underline{A}_j n_j [[\varphi]] + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \varphi \} \} . \quad (7.3)$$

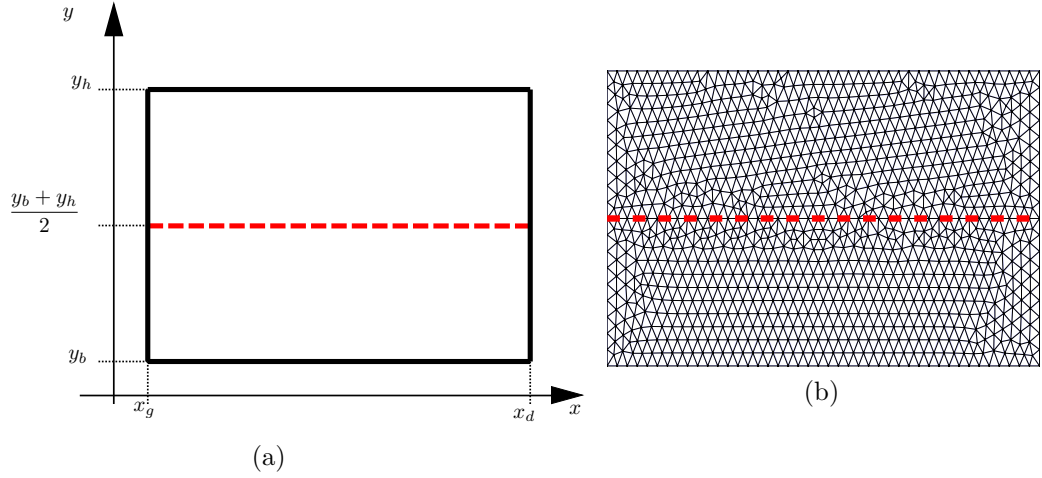


FIGURE 7.3 – Cas de validation de la condition de Darcy : géométrie (a) et maillage (b).

### 7.2.1.1 Applications numériques : Validations

Afin de valider l'implantation de la condition de Darcy dans le code **EMILE** et d'illustrer son application, nous nous intéressons au cas simple, sans écoulement, d'une boîte rectangulaire de hauteur  $2H = y_h - y_b$  et de largeur  $L = x_d - x_g$  scindée en deux par une plaque de résistance  $R$ , voir figure 7.3(a). Deux familles de modes acoustiques existent :

- si la vitesse verticale présente un nœud au niveau de la plaque, la condition de Darcy impose simplement que  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  soit continu à travers la plaque. Les modes satisfaisant ainsi  $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$  en  $y = 0$  correspondent simplement à des modes de boîte de dimension  $L \times H$  dont les fréquences propres sont données par (voir la section B.2.3 en annexe) :

$$\tilde{\omega}_{m;n}^a = a_0 \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}$$

- l'autre famille de modes satisfait la relation :

$$\frac{a_0 k_y Z}{i\omega} = \frac{1}{\tan(k_y y_b)} - \frac{1}{\tan(k_y y_h)} \text{ avec } k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{a_0^2} - \left(\frac{m\pi}{x_d - x_g}\right)^2}. \quad (7.4)$$

Le mode  $(m;n)$  correspond ainsi pour un ordre  $m$  en  $x$  donné à la  $n$ -ième solution de eq. (7.4). Pour  $m = 0$ , la solution est simplement donnée par :

$$\omega_{0;n}^a = \frac{a_0}{H} \left( \arctan\left(\frac{-2i}{R}\right) + n\pi \right).$$

Pour  $m \neq 0$ , la solution  $\omega_{m;n}^a$  est recherchée par un processus de Newton-Raphson initialisé avec  $\omega = a_0 \sqrt{(m\pi/L)^2 + \omega_{0;n}^a/a_0}$ .

Un calcul de modes propres a été effectué sur le maillage représenté figure 7.3(b), construit avec un pas uniforme  $\Delta h \approx H/10$ . La boîte a pour rapport d'aspect  $L/(2H) = 2,2$  et la cible de la transformation spectrale a pour valeur  $\omega_\sigma H/a_0 = 2,94 + 1,47i$ . Les pulsations propres obtenues sont représentées figure 7.4, ainsi que les solutions analytiques (à noter que la méthode de résolution par un processus de Newton-Raphson n'a pas permis de trouver les modes  $\omega_{m;n}^a$  pour  $(m = 7; n = 0)$  et  $(m = 8; n = 0)$ ). Qualitativement, il est ainsi possible d'observer que l'implantation de la condition de Darcy comme présentée dans la section précédente donne des valeurs propres en accord avec les deux familles de solutions analytiques.

1. Cette modélisation est grossière puisqu'elle néglige la réactance ainsi que la variation fréquentielle de la résistance. Une telle modélisation correspond plutôt à un wiremesh.

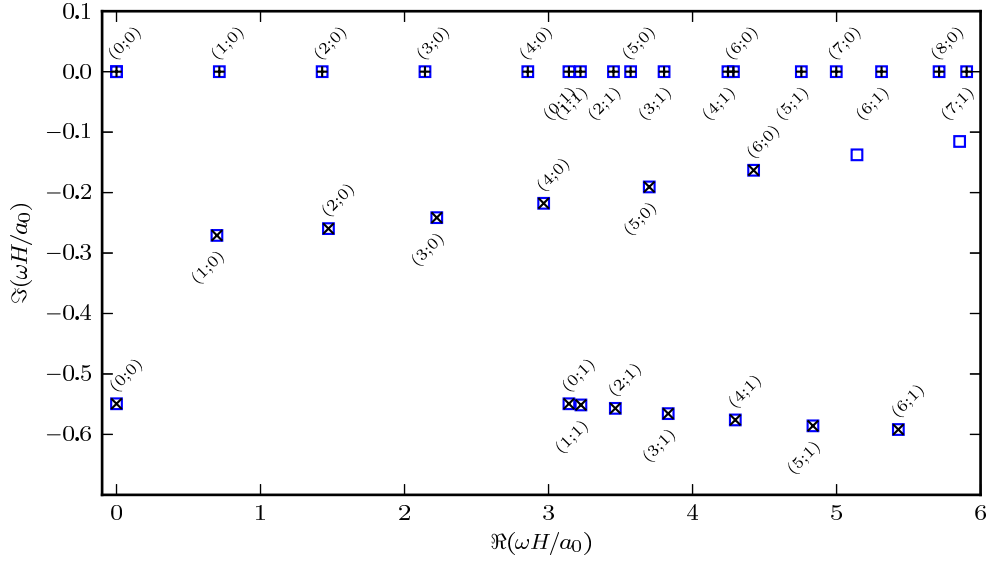


FIGURE 7.4 – Pulsations propres - Comparaison entre les résultats obtenues avec EMILE ( $\square$ ) et la première  $\hat{\omega}_{(m;n)}^a(+)$  et la seconde  $\omega_{(m;n)}^a(\times)$  familles de solutions analytiques. Pour chaque valeur propre, l'ordre  $m$  en  $x$  et l'ordre  $n$  en  $y$  du mode propre associé sont donnés sous la forme  $(m;n)$ .

Afin d'évaluer avec quelle précision est appliquée la condition de Darcy, nous nous proposons d'analyser quantitativement l'erreur entre les valeurs propres obtenues numériquement et analytiquement. Figure 7.5 est tracée l'erreur relative en fonction de  $\lambda/\Delta h$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le plan donnée par  $\lambda = 2\pi a_0/\Re(\omega)$ . À titre de comparaison, l'erreur numérique obtenue en section 4.2.3.1 est aussi tracée. Il est observé que l'erreur est du même ordre de grandeur que celle obtenue dans le cas de référence traité section 4.2.3.1, ce qui montre que le flux numérique développé dans la section précédente permet d'imposer une condition de Darcy en gardant le niveau d'erreur relatif au raffinement du maillage.

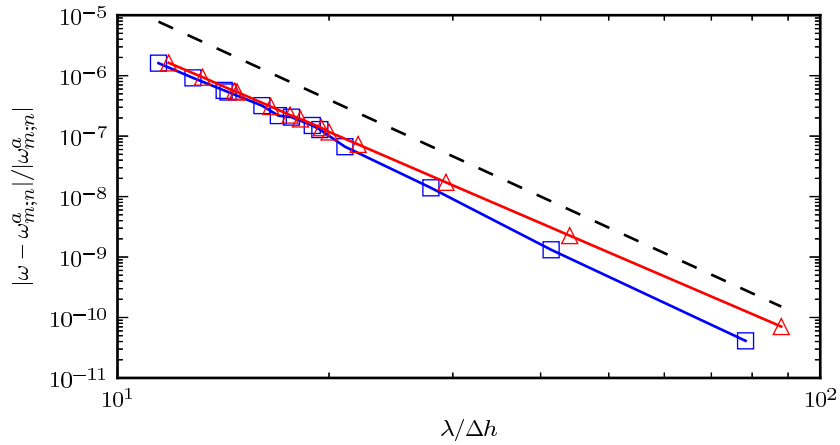


FIGURE 7.5 – Erreur relative  $\left| \frac{\omega - \omega_{m;n}^a}{\omega_{m;n}^a} \right|$  en fonction du nombre d'élément par longueur d'onde  $\lambda/\Delta h$  pour la première (—) et la seconde (—) famille de mode. Erreur relative obtenue en section 4.2.3.1 (----) :  $3,32 \times (\lambda_T/\Delta h)^{-5,31}$ .

À titre d'exemple, les champs  $\Re(v)$  et  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  du mode  $(2; 1)$  sont tracés figures 7.6(a) et (b). La valeur nulle de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  au niveau de la plaque perforée est un artifice graphique : en effet, les champs sont tracés comme sur des maillages éléments finis standards en prenant la moyenne sur chaque point du maillage.

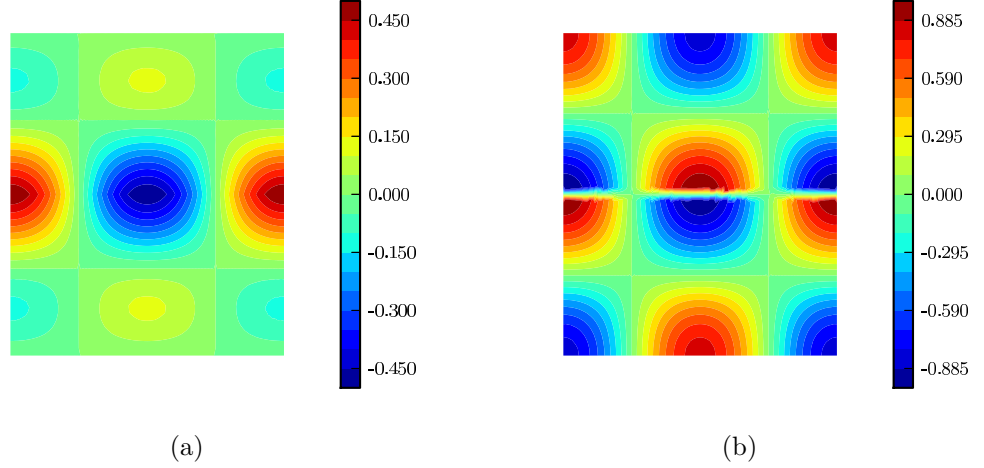


FIGURE 7.6 – Champ de  $\Re(v)$ (a) et  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$ (b) du mode  $(2; 1)$ .

### 7.2.1.2 Condition de Darcy et équations adjointes

L'intégration temporelle du problème adjoint est effectuée lors de la recherche de la perturbation initiale optimale. Il est donc nécessaire de connaître l'adjoint de la condition aux limites.

#### Discretisation de l'adjoint continu

Soit un domaine physique  $\Omega$  constitué de deux sous-domaines  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  séparés par  $\Gamma^R$  où est imposée une condition de Darcy d'impédance  $R$ . En reprenant les calculs développés section 6.1.2.1 permettant la détermination des équations adjointes, le terme de bord suivant apparaît<sup>2</sup> :

$$\int_{\partial\Omega^1 \cap \Gamma^R \times [0; T]} \underline{\varphi} \cdot \underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi}^* d\Gamma dt + \int_{\partial\Omega^2 \cap \Gamma^R \times [0; T]} \underline{\varphi} \cdot \underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi}^* d\Gamma dt.$$

L'annulation de ce terme passe par l'imposition d'une condition de Darcy d'impédance  $-R$  sur l'état adjoint. Le flux numérique  $\underline{\Pi}^*$  dans la formulation adjointe est construit en suivant la même démarche que pour le problème direct :  $\underline{\Pi}^*$  est pris comme un flux centré entre la trace intérieure et une trace fictive  $\underline{\varphi}^{*d}$  définie telle que

$$\begin{cases} \underline{u}^{*d} \cdot \underline{n} = \underline{u}^{*+} \cdot \underline{n} \\ a_0 \frac{\rho^{*d}}{\rho_0} = a_0 \frac{\rho^{*+}}{\rho_0} - R \frac{\underline{u}^{*-} \cdot \underline{n} + \underline{u}^{*+} \cdot \underline{n}}{2} \end{cases},$$

menant ainsi à :

$$\underline{\Pi}^* (\underline{\varphi}^{*-}; \underline{\varphi}^{*+}; \underline{n}) + \underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi}^{*-} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{A}}_j n_j [[\underline{\varphi}^*]] + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \underline{\varphi}^* \} \}. \quad (7.5)$$

#### Adjoint du discrétisé

2. Contrairement aux calculs développés au chapitre 6, le problème est à présent réel.



En reprenant les calculs développés en section 6.1.2.3, la formulation Galerkin discontinue pour l'élément  $l$  par rapport à une fonction test  $\underline{\varphi}^*$  donne le terme de bord (le terme de bord issu de l'intégration par parties a été inclus) :

$$\begin{aligned} & \left( \underline{\underline{A}}_j n_j \{ \{ \underline{\varphi} \} \} + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \underline{\varphi} \} \} \mid \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \cap \Gamma^R \times [0; T]} \\ &= \left( \underline{\varphi}^- \mid \underline{\underline{A}}_j n_j \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} \right)_{\partial D_l \cap \Gamma^R \times [0; T]} \\ & \quad + \left( \underline{\varphi}^+ \mid \underline{\underline{A}}_j n_j \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} \right)_{\partial D_l \cap \Gamma^R \times [0; T]} . \end{aligned}$$

En «échangeant» le terme en  $\underline{\varphi}^+$  avec celui de l'autre côté de  $\Gamma^R$ , le terme de bord s'écrit :

$$\left( \underline{\varphi}^- \mid -\frac{1}{2} \underline{\underline{A}}_j n_j [ [\underline{\varphi}^*] ] + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \underline{\varphi}^* \} \} \right)_{\partial D_l \cap \Gamma^R \times [0; T]} .$$

Il est ainsi démontré que l'imposition d'une condition de Darcy par le flux numérique développé permet de garder un adjoint discrétisé équivalent au discrétisé de l'adjoint.

➤ Remarque : Ce résultat s'étend au cas où l'impédance de la plaque perforée n'est pas simplement réelle pure, il suffit alors de remplacer la résistance  $R$  de la plaque perforée par son impédance  $Z_p$ . Il est montré que cela revient à imposer sur l'état adjoint une condition de Darcy d'impédance  $-\overline{Z_p}$ .

## 7.2.2 Résolution 1D

Nous nous intéressons à présent à la résolution de la propagation acoustique au sein des cavités. Ces dernières sont considérées unidimensionnelles et la propagation acoustique y est donc régie par les équations d'Euler linéarisées unidimensionnelles. Il est ainsi possible de montrer en domaine fréquentiel l'égalité :

$$\frac{a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \mid_l}{\underline{u} \cdot \underline{n}} = i \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} \right) .$$

### 7.2.2.1 Formulation Galerkin discontinue

Les liners sont supposés horizontaux avec donc des cavités orientées selon l'axe vertical. Au sein des cavités, l'écoulement porteur est nul et les équations d'Euler linéarisées dans ces dernières s'écrivent :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi} = 0 , \quad (7.6)$$

$$\text{où } \underline{\varphi} = \left( v ; a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right)^T, \quad \underline{\underline{A}}_y = a_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le développement du schéma Galerkin discontinu associé suit la démarche présentée précédemment et s'écrit pour un élément  $U_l$  unidimensionnel :

$$\forall \underline{\psi}_m \int_{U_l} \left( \partial_t \underline{\varphi} + \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\psi}_m \, d\Gamma + \left[ \left( \Pi(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; n_y) - \underline{\underline{A}}_y n_y \underline{\varphi}^- \right) \cdot \underline{\psi}_m \right]^{y_l^+; y_l^-} = 0. \quad (7.7)$$

$y_l^+$  et  $y_l^-$  correspondent aux frontières respectivement haute et basse de l'élément unidimensionnel  $U_l$  et  $n_y(y_l^\pm) = \pm 1$ .

Comme pour les schémas Galerkin discontinus présentés précédemment, un flux décentré amont est choisi entre les éléments. La matrice  $\underline{\underline{A}}_y n_y$  est diagonalisable à valeurs propres réelles  $\pm a_0 n_y$  :

$$\underline{\underline{A}}_y n_y = \underbrace{\frac{a_0 n_y}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{terme associé à } -a_0 n_y} + \underbrace{\frac{a_0 n_y}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{terme associé à } a_0 n_y} .$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \left[ \underline{A_y n_y} \right]^- = \max \left( 0; \frac{a_0 n_y}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \min \left( 0; \frac{a_0 n_y}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \left[ \underline{A_y n_y} \right]^+ = \max \left( 0; \frac{a_0 n_y}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \min \left( 0; \frac{a_0 n_y}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.8)$$

La condition aux limites modélisant la paroi rigide à l'extrémité des cavités est imposée comme en section 3.1.1.1 par un flux numérique centré. Le terme de flux associé s'écrit en simplifiant l'expression développée dans le cas bidimensionnel :

$$\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; n_y) - \underline{A_y n_y} \underline{\varphi}^- = \underline{M} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n_y & 0 \end{pmatrix} \underline{\varphi}^-.$$

De même, le flux numérique permettant d'appliquer une condition de Darcy de résistance  $R$  est obtenu en simplifiant le cas bidimensionnel :

$$\underline{\Pi}(\underline{\varphi}^-; \underline{\varphi}^+; n_y) - \underline{A_y n_y} \underline{\varphi}^- = \frac{1}{2} \underline{A_y n_y} [[\underline{\varphi}]] + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \underline{\varphi} \} \}.$$

### 7.2.2.2 Mise en œuvre

Mathématiquement, la création des matrices locales se fait par intégration numérique sur les éléments unidimensionnels, traités comme les bords des triangles  $\partial D_l$  (voir sections 3.1.3 et 4.1.2).

Du point de vue de l'implantation, la difficulté majeure provient du fait que les matrices locales sont à présent de taille différente selon que l'élément courant est unidimensionnel ou triangulaire. En outre, un traitement particulier doit être apporté pour un élément courant adjacent à la plaque perforée, les traces intérieures et extérieures étant alors de tailles différentes.

Les éléments unidimensionnels sont placés en dessous de chaque point de contrôle du maillage se trouvant au niveau de la plaque perforée, voir schéma fig. 7.7.

### Pas de maillage des éléments unidimensionnels

Le code EMILE propose deux façons de définir le maillage au sein d'une cavité. La première solution consiste simplement à définir la taille des éléments unidimensionnels comme étant le pas local  $\Delta h$  de maillage des triangles sur la plaque perforée. Ainsi, pour chaque point de contrôle se trouvant sur la plaque perforée, environ  $6h/\Delta h$  degrés de liberté sont ajoutés au problème. Cette solution est envisageable lors de l'étude de configurations où le conduit est de grande dimension par rapport au liner et où le maillage n'est pas trop raffiné près du liner. Ce cas d'étude peut correspondre par exemple à l'étude sur des configurations représentatives d'entrée ou de sortie d'air de turbofan (dans [124] par exemple le conduit modélisant une sortie d'air de turbofan a une dimension d'environ 30cm tandis que les cavités de la structure en nid d'abeille ont une hauteur d'environ 37mm) à condition que la couche limite de l'écoulement porteur ne soit pas trop fine.

Dans le cas où cette solution ne serait pas envisageable, comme ce sera le cas lors des études du chapitre 8 où d'une part la dimension des cavités est plus importante que la hauteur du conduit et où d'autre part le maillage est raffiné au voisinage du liner, une solution alternative est choisie. Elle consiste à définir le pas de maillage dans les cavités  $\Delta h^c$  non pas à partir du pas de maillage des triangles situés de l'autre côté de la plaque perforée mais à partir de la précision requise et de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde des phénomènes calculés  $\lambda_p$ . Cet ordre de grandeur est donné lors d'un calcul modal à partir de la cible  $\sigma$  de la transformation shift-invert :  $\lambda_p = \Re(a_0 2\pi/\sigma)$  et à partir du pas de temps lors d'un calcul en domaine temporel :  $\lambda_p = a_0 \Delta t$ . Les travaux menés en section 4.2.3.1 ont permis de déterminer que pour un phénomène de longueur d'onde  $\lambda_p$ , l'erreur  $\epsilon$  due à la discrétisation spatiale suivait la loi (eq. (4.4)) :

$$\epsilon = 3,32 \left( \frac{\lambda_p}{\Delta} \right)^{-5,31}.$$

L'idée est alors de déterminer  $\Delta h^c$  à partir de :

$$\Delta h^c = \lambda_p \exp \left( \frac{1}{5,31} \ln \left( \frac{Tol}{3,32} \right) \right) \quad (7.9)$$

où  $Tol$  est la tolérance imposée pour la méthode de Krylov-Schur ou celle prise pour la recherche de la perturbation initiale optimale (nous verrons au chapitre 8 à quoi correspond cette tolérance). Bien que cette solution ne soit pas parfaitement rigoureuse, la tolérance de la méthode de Krylov-Schur ne correspondant pas directement à une précision sur les valeurs propres, elle permet de réduire le nombre de degrés de liberté attribués à la résolution dans les cavités tout en gardant une précision suffisante pour les phénomènes considérés.

Le pas de maillage choisi est finalement le minimum des pas de maillage obtenus avec ces deux méthodes. Il est de plus permis à l'utilisateur de définir manuellement le nombre d'éléments unidimensionnels par cavité.

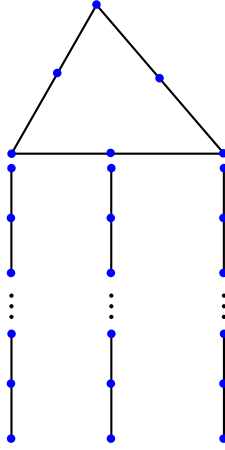


FIGURE 7.7 – Schéma représentant l'ajout d'éléments unidimensionnels sous un triangle appartenant au conduit.

### 7.3 Extension de la méthode de Sbardella et collab.

Afin de résoudre la propagation acoustique en présence de liner en domaine temporel, la majorité des études publiées font usage soit du modèle masse-ressort-amortisseur (section 2.2.3.2) soit de la transformée en  $z$  avec la loi d'impédance EHR (section 2.2.3.1) rappelée ici :

$$Z(\omega) = R - iM\omega + i\phi \cotan\left(\frac{\omega h}{a_0} + i\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

La méthode de Sbardella et collab. n'a en revanche que très peu été utilisée ([48] par exemple). Étant donné qu'elle modélise le modèle d'impédance du résonateur d'Helmholtz

$$Z(\omega) = R + i \cotan\left(\frac{\omega h}{a_0}\right)$$

dont la résistance est constante, elle ne permet de modéliser l'évolution fréquentielle que de certains liners uniquement.

Nous nous proposons donc d'améliorer la méthode en rendant son utilisation possible sur une gamme étendue de fréquence. Pour cela nous améliorons la méthode de Sbardella et collab. afin de modéliser une évolution de l'impédance se rapprochant plus du modèle EHR (présenté en section 2.2.1.2) en intégrant le terme d'amortissement  $\varepsilon$ , les termes  $M$  et  $\phi$  étant négligés :

$$Z(\omega) = R + i \cotan\left(\frac{\omega h}{a_0} + i\frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (7.10)$$

L'idée est de chercher comment modifier les équations d'Euler unidimensionnelles pour obtenir l'égalité :

$$\frac{a_0}{\underline{u} \cdot \underline{n}} \Big|_l = i \cotan\left(\frac{\omega h}{a_0} + i\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Cela s'obtient aisément en modifiant eq. (7.6) en :

$$\partial_t \varphi + \underline{\underline{A}}_y \partial_y \varphi + \frac{a_0 \varepsilon}{2h} \varphi = 0. \quad (7.11)$$

L'implantation de ce modèle est aisée, le terme ajouté ne modifiant pas les caractéristiques du problème. L'ajout du terme  $\varepsilon$  permet de palier une des limitations majeures du modèle du résonateur d'Helmholtz standard à savoir l'indépendance fréquentielle de sa résistance.

### 7.3.1 Opérateur adjoint :

La résolution du problème adjoint étant nécessaire lors de la recherche de la perturbation initiale optimale, l'opérateur adjoint est ici exprimé.

Les équations adjointes s'écrivent :

$$-\partial_t \varphi^* - \underline{\underline{A}}_y \partial_y \varphi^* + \frac{a_0 \varepsilon}{2h} \varphi^* = 0. \quad (7.12)$$

L'implantation des équations adjointes se fait trivialement à partir de l'implantation des équations directes. Le terme d'amortissement ajouté dans les équations d'Euler ne modifiant pas les caractéristiques, la propriété de consistance de l'adjoint du schéma est gardée.

### 7.3.2 Validations

Afin de valider l'implantation et le bon fonctionnement du modèle d'impédance présenté précédemment, les résultats obtenus numériquement sont comparés à une solution semi-analytique dans un cas académique sans écoulement.

Soit un conduit fermé de hauteur  $H$  et de longueur  $L = AH$  où  $A = 1,25$  est le rapport d'aspect. Les parois sont rigides exceptée la paroi inférieure revêtue d'un matériau absorbant dont la résistance de plaque perforée est 0,5,  $h = H/2$  et  $\varepsilon = 0,7$ . La valeur propre du mode  $(m, n)$  est donnée par la  $n$ -ième solution de l'équation (voir en annexe section B.2.3) :

$$Hk_y \tan(Hk_y) = \frac{H\omega}{a_0 i Z(\omega)}$$

avec :

$$k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{a_0^2} - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}$$

$$Z(\omega) = R + i \cotan\left(\frac{\omega h}{a_0} + i \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

La résolution de cette équation non linéaire n'est pas triviale et est résolue numériquement de façon itérative :

- Une initialisation est faite à partir du mode rigide :

$$\omega = a_0 \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}$$

- Cette valeur de  $\omega$  sert de valeur de départ pour résoudre l'équation en remplaçant  $Z(\omega)$  par  $G_z Z(\omega)$  où  $G_z \gg 1$  ( $G_z \approx 1000$ ).
- Et ainsi de suite la solution obtenue sert de point de départ pour résoudre l'équation avec un  $G_z$  plus petit jusqu'à  $G_z = 1$ .

La résolution de l'équation à une itération donnée est faite par l'algorithme de Broyden implanté dans la librairie Python `Scipy` et autour de 250 itérations sont nécessaires. Le calcul des solutions semi-analytiques  $\omega_{m,n}^a$  est effectué<sup>3</sup> pour  $m \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$  et  $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$ . Les pulsations propres ainsi obtenues balayent une large bande de fréquence :  $\Re(\omega H/a_0) \in [1,5; 18,5]$ , il a donc été nécessaire de faire les calculs pour plusieurs valeurs de la cible de la transformation shift-invert :  $\sigma h/a_0 \in \{2,5; 4,7; 9,4; 14,1; 18,8\} + 1,2i$

3. Le mode  $(0; 0)$  étant particulier, il a été ignoré

pour garder une bonne précision. Figure 7.8(a) et (b) est tracée l'erreur relative obtenue entre la solution semi-analytique et le calcul dont la cible est telle que l'erreur soit minimale. La figure 7.8(a) correspond au cas où le pas de maillage des éléments unidimensionnels est déterminé à partir du pas de maillage des triangles situés sur la plaque perforée tandis que la courbe d'erreur figure 7.8(b) a été obtenue en définissant le pas de maillage à partir de la tolérance imposée ( $10^{-3}$ ), comme expliqué en section 7.2.2. Le tracé est fait en fonction de  $\lambda/\Delta h$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le plan donnée par  $\lambda = 2\pi a_0/\Re(\omega)$ . L'erreur numérique liée au raffinement du maillage calculée en section 4.2.3.1 est aussi tracée.

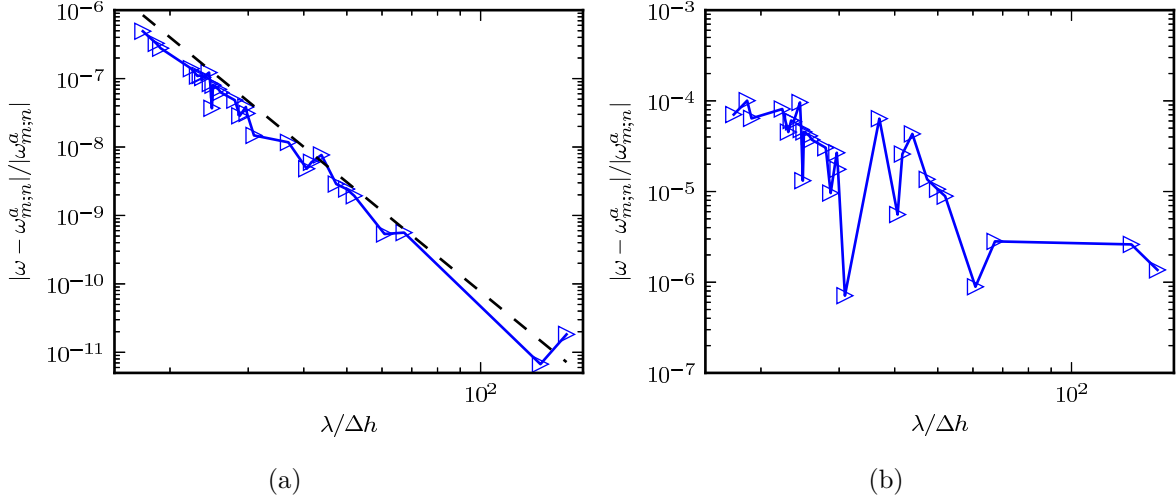


FIGURE 7.8 – Courbe d'erreur relative  $\left| \frac{\omega - \omega_{m;n}^a}{\omega_{m;n}^a} \right|$  entre la solution semi-analytique et les valeurs propres données par EMILE pour  $\sigma h/a_0 \in \{2,5; 4,7; 9,4; 14,1; 18,8\} + 1,2i$  en fonction du nombre d'élément par longueur d'onde  $\lambda/\Delta h$ . Erreur relative obtenue en section 4.2.3.1 (---) :  $3,32 \times (\lambda_T/\Delta h)^{-5,31}$ . Figure (a) : pas de maillage des éléments unidimensionnels déterminé à partir du pas de maillage des triangles situés sur la plaque perforée, figure (b) : définition du pas de maillage des éléments unidimensionnels à partir de la tolérance imposée ( $10^{-3}$ ).

Il est ainsi montré que, dans le cas où le pas de maillage des éléments unidimensionnels est défini à partir du pas de maillage des triangles situés sur la plaque perforée, le modèle d'impédance permet bien de reproduire une évolution de l'impédance de type EHR avec  $M = \phi = 0$  sans dégrader la précision liée au maillage dans le conduit. Par contre, la génération du maillage dans les cavités à partir de la valeur de la tolérance dégrade la précision, mais permet de la conserver au niveau demandé tout en réduisant significativement le nombre de degrés de liberté attribués aux éléments unidimensionnels. Les calculs de cible  $\sigma h/a_0 \in \{2,5; 4,7; 9,4; 14,1; 18,8\} + 1,2i$  sont alors effectués avec  $\{186; 372; 744; 1116; 1302\}$  éléments unidimensionnels contre 4464.

Afin de valider l'implantation des équations adjointes résolues dans les cavités unidimensionnelles, nous traçons figure 7.9 les valeurs propres de l'opérateur direct et le conjugué des valeurs propres de l'opérateur adjoint, la taille des éléments unidimensionnels étant déterminée uniquement à partir du pas de maillage des triangles situés de l'autre côté de la plaque perforée. Hormis pour quelques valeurs, relativement éloignées de la cible  $\sigma h/a_0 = 4,7 + 1,2i$ , un bon accord est observé, validant ainsi l'implantation de l'opérateur adjoint.

## 7.4 Application au modèle d'impédance de Aurégan et Leroux [6]

### 7.4.1 Détermination des paramètres et évaluation de l'erreur

Dans cette section, est étudiée la capacité du modèle ainsi développé à reproduire l'évolution fréquentielle de l'impédance du liner utilisé par Aurégan et Leroux [6]. Comme nous l'avons vu en section 2.3.5.3,

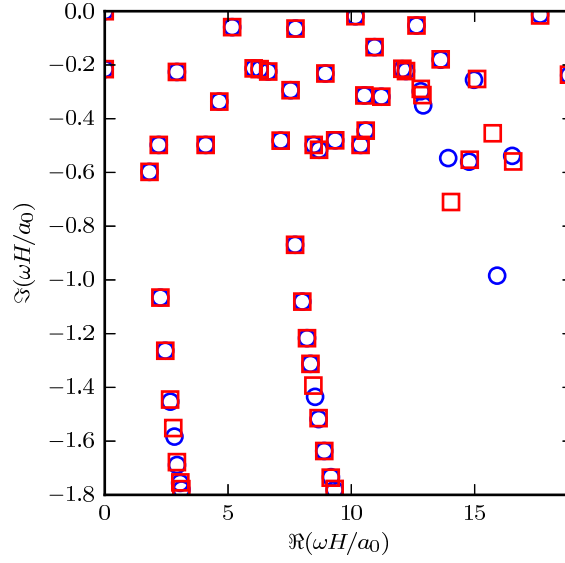


FIGURE 7.9 – Comparaison entre les valeurs propres de l'opérateur direct ( $\circ$ ) et le conjugué des valeurs propres de l'opérateur adjoint ( $\square$ ) pour  $\sigma h/a_0 = 4,7 + 1,2i$ .

cette évolution fréquentielle mesurée est approchée fidèlement par un modèle d'impédance avec pertes visco-thermiques eq. (2.26) et de façon moins précise par un modèle EHR sans termes relatifs à la plaque perforée eq. (2.27) ( $R = M = 0$ ) dans la gamme de fréquence  $f \in [70; 3000]$ Hz.

Le modèle d'impédance avec pertes visco-thermiques eq. (2.26) approximant fidèlement les valeurs de l'impédance mesurées, nous cherchons les paramètres  $R$ ,  $h$  et  $\varepsilon$  permettant d'approcher au mieux ce modèle d'impédance par eq. (7.10). Le processus d'optimisation se fait dans la gamme de fréquence  $f \in [f_{\min} = 70; f_{\max} = 3000]$ Hz à l'aide l'algorithme de Levenberg-Marquardt implanté dans la librairie Python `lmfit`. Les paramètres ainsi trouvés sont  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$ s,  $\varepsilon = 339 \times 10^{-3}$ ,  $R = 68 \times 10^{-3}$ .

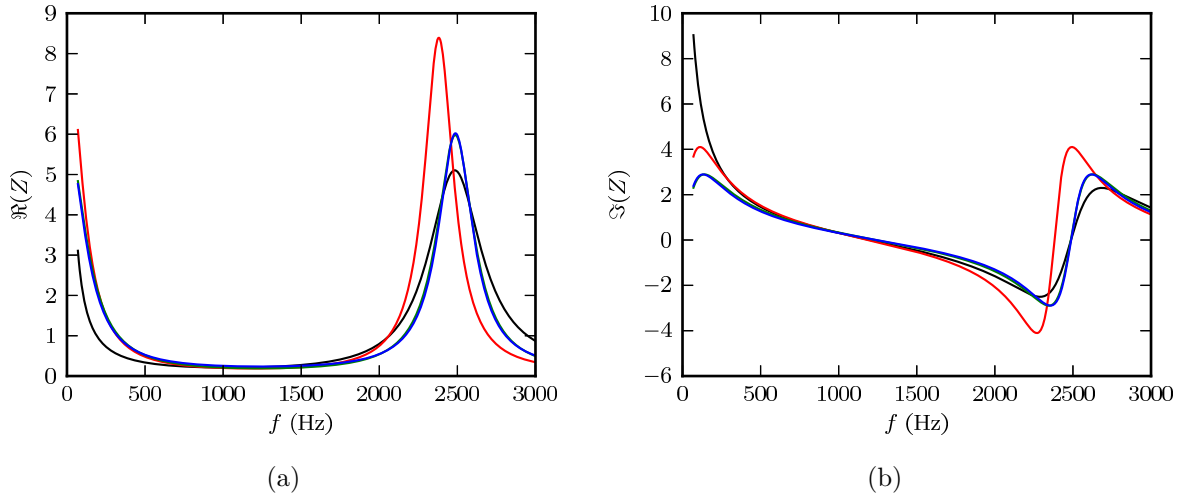


FIGURE 7.10 – Parties réelle (a) et imaginaire (b) de l'impédance donnée par le modèle avec pertes visco-thermiques eq. (2.26) (courbe noire), par eq. (7.10) (courbe bleue), par eq. (2.27) avec les paramètres donnés dans la référence [6] (courbe rouge) et avec les paramètres  $\phi = 1,07$ ,  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$  s et  $\varepsilon = 0,36$  (courbe verte).

Figures 7.10(a) et (b) sont respectivement tracées les résistances et réactances des modèles eq. (7.10) avec ces paramètres et eqs. (2.26) (2.27) avec les paramètres donnés par Aurégan et Leroux [6]. En outre,

nous traçons l'évolution du modèle eq. (2.27) où les paramètres sont déterminés par `lmfit` :  $\phi = 1,07$ ,  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$  s et  $\varepsilon = 0,36$  (la courbe est quasi superposée avec celle correspondant au modèle eq. (7.10)).

Afin de quantifier plus précisément l'écart par rapport à l'impédance de référence eq. (2.26) (notée  $Z_{VT}$ ), l'erreur quadratique relative  $|Z - Z_{VT}|^2/|Z_{VT}|^2$  est tracée figure 7.11. Afin d'estimer l'erreur globale, nous nous intéressons à la grandeur

$$E_Z = \frac{1}{f_{\max} - f_{\min}} \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \frac{|Z - Z_{VT}|^2}{|Z_{VT}|^2} df. \quad (7.13)$$

L'erreur  $E_Z$  relative au modèle eq. (2.27) avec les paramètres donnés dans la référence [6] est  $E_Z = 15\%$ , nous observons figure 7.11 (courbe rouge) que l'erreur relative est assez importante aux basses fréquences et autour de 2500 Hz. Le modèle eq. (7.10) (courbe bleue) est caractérisé par  $E_Z = 5,8\%$ , l'erreur étant diminuée autour de 2500 Hz mais reste importante aux basses fréquences et est dégradée autour de la résonance (1000 Hz). Il est curieux de noter que l'utilisation du modèle d'impédance eq. (2.27) avec les paramètres déterminés par `lmfit` (courbe verte) donne une erreur bien plus faible :  $E_Z = 5,2\%$ , associée à un meilleur comportement autour de 2500 Hz. Le modèle prenant en compte les pertes visco-thermiques

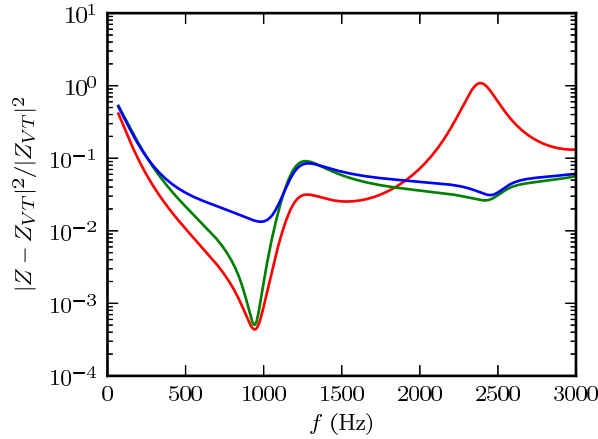


FIGURE 7.11 – Erreur quadratique relative  $|Z - Z_{VT}|^2/|Z_{VT}|^2$  où  $Z$  est donné par eq. (7.10) (courbe bleue) et par eq. (2.27) avec les paramètres donnés dans la référence [6] (courbe rouge) et avec les paramètres  $\phi = 1,07$ ,  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$  s,  $\varepsilon = 0,36$  (courbe verte).

approximant fidèlement les mesures, l'explication ne semble pas provenir du fait que Aurégan et Leroux [6] aient déterminé les paramètres à partir des mesures, et non du modèle avec pertes visco-thermiques.

La fréquence de résonance de la loi d'impédance d'équation (7.10) est 1243 Hz, celles du modèle visco-thermique et du modèle EHR avec les paramètres donnés par Aurégan et Leroux [6] sont respectivement 1202 Hz et 1190 Hz.

#### 7.4.2 Amélioration de l'approximation de l'impédance du liner

Dans cette section est évalué en quoi l'ajout des termes de réactance de masse et de porosité pourraient permettre une meilleure modélisation du comportement fréquentiel du liner. Pour cela, une étude similaire à celle présentée en section 7.4.1 est menée. Nous cherchons à approcher le modèle d'impédance avec pertes visco-thermiques défini par Aurégan et Leroux [6] (reproduisant bien l'évolution de l'impédance mesurées expérimentalement) par un modèle EHR avec  $M = 0$  (impédance notée  $Z_\phi$ ), par un modèle EHR avec  $\phi = 0$  (impédance notée  $Z_M$ ) et par un modèle EHR standard (impédance notée  $Z_{EHR}$ ). Ces résultats sont alors comparés entre eux et avec le modèle eq. (7.10) étudié en section 7.4.1, pour lequel nous rappelons les valeurs des paramètres :  $R = 68 \times 10^{-3}$ ,  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$  et  $\varphi = 339 \times 10^{-3}$ .

À l'issu du processus d'optimisation, les paramètres suivants ont été trouvés :

- Pour  $Z_\phi$  :  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$  s,  $\varepsilon = 361 \times 10^{-3}$ ,  $R = 3,06 \times 10^{-5}$  et  $\phi = 1,07$ .

- Pour  $Z_M$  :  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$  s,  $\varepsilon = 339 \times 10^{-3}$ ,  $R = 68 \times 10^{-3}$  et  $M = 4,93 \times 10^{-6}$  s.
- Pour  $Z_{EHR}$  :  $h/a_0 = 2,01 \times 10^{-4}$  s,  $\varepsilon = 361 \times 10^{-3}$ ,  $R = 4,45 \times 10^{-11}$ ,  $M = 5,03 \times 10^{-6}$  s et  $\phi = 1,07$ .

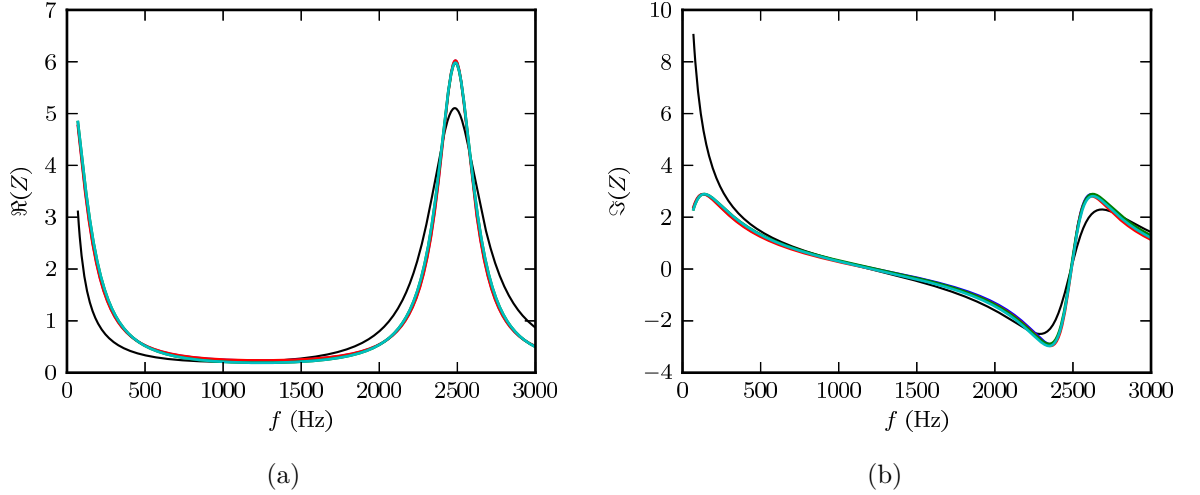


FIGURE 7.12 – Parties réelle (a) et imaginaire (b) des impédances  $Z_{VT}$  (courbe noire),  $Z_m$  (courbe rouge),  $Z_\phi$  (courbe verte),  $Z_{EHR}$  (courbe cyan) et eq. (7.10) avec pour paramètres ceux déterminés en section 7.4.1 (courbe bleue).

Les résistances et réactances sont tracées figures 7.12(a) et (b). Les quatre courbes étant quasi superposées, l'erreur quadratique relative  $|Z - Z_{VT}|^2 / |Z_{VT}|^2$  est tracée figure 7.11. Il est observé que l'introduction du terme  $\phi$  permet d'avoir un meilleur comportement au voisinage de la résonance ( $\approx 1000$  Hz) comme cela est visible sur les courbes verte et cyan représentant respectivement  $Z_\phi$  et  $Z_{EHR}$ .

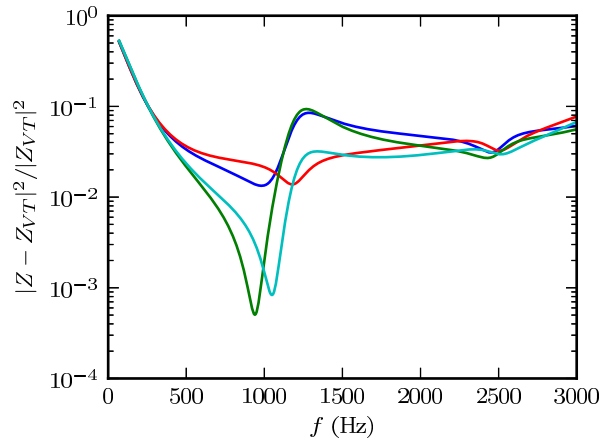


FIGURE 7.13 – Erreur quadratique relative  $|Z - Z_{VT}|^2 / |Z_{VT}|^2$  où  $Z = Z_m$  (courbe rouge),  $Z = Z_p$  (courbe verte),  $Z = Z_{EHR}$  (courbe cyan) et où  $Z$  est donné par eq. (7.10) (courbe bleue).

Les trois modèles d'impédance  $Z_\phi$ ,  $Z_M$  et  $Z_{EHR}$  permettent une meilleure approximation de  $Z_{VT}$  que le modèle défini par eq. (7.10) sans que l'amélioration soit pour autant significative. En effet, les valeurs de  $E_Z$ , mesure de l'erreur globale définie par eq. (7.13), pour les impédances  $Z_\phi$ ,  $Z_M$  et  $Z_{EHR}$  sont respectivement 5,2%, 5,0% et 4,3% (nous rappelons que pour l'impédance définie par eq. (7.10), on a  $E_Z = 5,8\%$ ).



## 7.5 Vers de futures extensions

Selon les études envisagées à l'avenir, il pourrait être intéressant de ne pas limiter la méthode à son utilisation sur des géométries où le traitement acoustique est placé sur la paroi inférieure horizontale du conduit. Des extensions sont ainsi envisageables pour traiter de nouvelles configurations : liner placé sur la paroi supérieure du conduit, liner placé sur une paroi courbe... De plus, il n'est pas possible à ce stade de développement du code de traiter des cas où un liner est considéré infini selon l'axe du conduit. Il serait ainsi intéressant de pouvoir traiter de tels cas en implantant la méthode de Sbardella et collab. dans les couches PML.

En ce qui concerne les modèles d'impédance, nous avons vu en section 7.4.1 que celui implanté dans EMILE permet d'approcher des évolutions fréquentielles d'impédances représentatives de liners. Nous présentons dans cette section les extensions qui pourront lui être apportées ultérieurement.

### 7.5.1 Ajout de la réactance de masse

Afin de se rapprocher du modèle EHR, il serait nécessaire dans un premier temps d'incorporer le terme de réactance de masse. La prise en compte de celle-ci  $M$  revient à modifier l'équation (7.2) en :

$$R \underline{u} \cdot \underline{n} + M \partial_t \underline{u} \cdot \underline{n} = a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_d - a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_l \quad (7.14)$$

Du point de vue de l'implantation, la démarche est analogue à celle suivie en section 7.2.1 : un flux numérique centré est introduit et la trace  $\varphi^d$  fictive est ici définie telle que<sup>4</sup> :

$$\begin{cases} \underline{u}^d \cdot \underline{n} = \underline{u}^+ \cdot \underline{n} , \\ a_0 \frac{\rho^d}{\rho_0} = a_0 \frac{\rho^+}{\rho_0} + R \frac{\underline{u}^- \cdot \underline{n} + \underline{u}^+ \cdot \underline{n}}{2} + M \partial_t \underline{u}^- \cdot \underline{n} . \end{cases}$$

Le terme dans l'intégrale de bord s'écrit alors :

$$\Pi(\varphi^-; \varphi^+; \underline{n}) - \underline{A}_j n_j \varphi^- = \underline{A}_j n_j [[\varphi]] + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \varphi \} \} + \frac{a_0 M}{2} \begin{pmatrix} 0 & \underline{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_t \varphi^- . \quad (7.15)$$

#### 7.5.1.1 Adjoint continu et sa discrétisation

Nous reprenons ici le raisonnement mené en 7.2.1.2 : soit un domaine physique  $\Omega$  constitué de deux sous-domaines  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  séparés par  $\Gamma^R$  où est imposée une condition de Darcy d'impédance  $R$  et de réactance de masse  $M$ . La recherche de l'opérateur adjoint fait apparaître les termes de bord :

$$\int_{\partial\Omega^1 \cap \Gamma^R \times [0; T]} \varphi \cdot \underline{A}_j n_j \varphi^* d\Gamma dt + \int_{\partial\Omega^2 \cap \Gamma^R \times [0; T]} \varphi \cdot \underline{A}_j n_j \varphi^* d\Gamma dt .$$

En notant  $\underline{n}_1 = -\underline{n}_2 = \underline{n}$  et en prenant  $\underline{u}_1 \cdot \underline{n} = \underline{u}_2 \cdot \underline{n} = \underline{u} \cdot \underline{n}$ , ce terme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega^1 \cap \Gamma^R \times [0; T]} a_0 \left[ \underline{u} \cdot \underline{n} \left( a_0 \frac{\rho_1^*}{\rho_0} - a_0 \frac{\rho_2^*}{\rho_0} \right) + \underline{u}^* \cdot \underline{n} \left( a_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} - a_0 \frac{\rho_2}{\rho_0} \right) \right] d\Gamma dt \\ &= \int_{\partial\Omega^1 \cap \Gamma^R \times [0; T]} a_0 \left[ \underline{u} \cdot \underline{n} \left( a_0 \frac{\rho_1^*}{\rho_0} - a_0 \frac{\rho_2^*}{\rho_0} \right) + \underline{u}^* \cdot \underline{n} (R \underline{u} \cdot \underline{n} + M \partial_t \underline{u} \cdot \underline{n}) \right] d\Gamma dt \\ &= \int_{\partial\Omega^1 \cap \Gamma^R \times [0; T]} a_0 \underline{u} \cdot \underline{n} \left( a_0 \frac{\rho_1^*}{\rho_0} - a_0 \frac{\rho_2^*}{\rho_0} + R \underline{u}^* \cdot \underline{n} - M \partial_t \underline{u}^* \cdot \underline{n} \right) d\Gamma dt + \left[ \int_{\partial\Omega^1 \cap \Gamma^R} a_0 M \underline{u}^* \cdot \underline{n} \underline{u} \cdot \underline{n} d\Gamma \right]_0^T . \end{aligned}$$

La condition sur l'état adjoint s'écrit ainsi :

$$-R \underline{u}^* \cdot \underline{n} + M \partial_t \underline{u}^* \cdot \underline{n} = a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_d - a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_l \quad (7.16)$$

ce qui mène au terme de flux :

$$\Pi^*(\varphi^{*-}; \varphi^{*+}; \underline{n}) + \underline{A}_j n_j \varphi^{*-} = -\underline{A}_j n_j [[\varphi^*]] + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \varphi^* \} \} - \frac{a_0 M}{2} \begin{pmatrix} 0 & \underline{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_t \varphi^{*-} . \quad (7.17)$$

4. Il serait possible, comme pour le terme porté par  $R$ , de prendre  $(\partial_t \underline{u}^- \cdot \underline{n} + \partial_t \underline{u}^+ \cdot \underline{n})/2$  au lieu de  $\partial_t \underline{u}^- \cdot \underline{n}$  dans la définition de  $a_0 \frac{\rho^d}{\rho_0}$ . Cela aurait pour inconvénient de rendre la matrice de masse non diagonale par blocs.

### 7.5.1.2 Adjoint de l'opérateur discrétisé

Soit  $\underline{\varphi}^*$  une fonction test. La formulation Galerkin fera apparaître le terme :

$$\left( \underline{\underline{A}}_j n_j [[\underline{\varphi}]] + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \{ \{ \underline{\varphi} \} \} + \frac{a_0 M}{2} \begin{pmatrix} 0 & \underline{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_t \underline{\varphi}^- \Big| \underline{\varphi}^* \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} .$$

De plus lors de la recherche de l'opérateur adjoint, l'intégration par parties spatiale fera apparaître le terme :

$$\left( \underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi}^- \Big| \underline{\varphi}^* \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} .$$

La somme de ces deux termes donnent (une intégration par partie temporelle est effectuée, les termes de bord sont omis) :

$$\begin{aligned} & \left( \underline{\varphi}^- \Big| - \underline{\underline{A}}_j n_j \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} - \frac{a_0 M}{2} \begin{pmatrix} 0 & \underline{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_t \underline{\varphi}^- \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} \\ & + \left( \underline{\varphi}^+ \Big| \underline{\underline{A}}_j n_j \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} + \frac{a_0 R}{2} \begin{pmatrix} \underline{n} \otimes \underline{n} & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \frac{\underline{\varphi}^{*-}}{2} \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} + \left( \underline{\varphi}^- \Big| \underline{\underline{A}}_j n_j \underline{\varphi}^{*-} \right)_{\partial D_l \cap \partial \Omega_h \times [0; T]} . \end{aligned}$$

Comme en section 6.1.2.3, l'idée est d'alors «d'échanger» le terme en  $\underline{\varphi}^+$  avec l'élément voisin. Nous retrouvons bien alors l'expression du flux trouvé par discrétisation des équations adjointes continues.

En suivant ces développements théoriques, il sera ainsi simple à l'avenir d'ajouter la prise en compte de la réactance de masse  $M$  dans la modélisation de l'impédance.

### 7.5.2 Ajout du terme $\phi$

Deux solutions sont envisageables pour incorporer le terme  $\phi$  du modèle EHR. La première solution consiste, comme pour l'ajout du terme d'amortissement  $\varepsilon$ , à modifier les équations à résoudre au sein des cavités. Ainsi, le terme  $\phi$  est bien pris en compte si l'équation (7.11) est résolue avec :

$$\underline{\underline{A}}_y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_0}{\phi} \\ a_0 \phi & 0 \end{pmatrix} .$$

La deuxième solution consiste à modifier la condition de plaque perforée, cela rejoint le fait que Aurégan et Leroux [6] et Richter [123] lient  $\phi$  à la porosité. La plaque perforée est alors modélisée par la relation :

$$R \underline{u} \cdot \underline{n} + M \partial_t \underline{u} \cdot \underline{n} = a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_d - \phi a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_l . \quad (7.18)$$

Néanmoins ces deux solutions ont pour effet de rendre la résolution différente au niveau de plaque perforée selon que l'élément courant est un triangle du conduit ou un élément unidimensionnel modélisant une cavité. Cela aura pour conséquence de perdre la propriété de consistance de l'adjoint. En effet, lors des démonstrations précédentes de consistance de l'adjoint, un «échange» était à opérer. Si ce dernier est toujours possible, il ne permettra plus en revanche de récupérer un terme ayant la même forme puisque  $\phi$  a «cassé la symétrie» de part et d'autre de la plaque perforée.

### 7.5.3 Autres modifications

Le modèle EHR bien qu'applicable à la modélisation des liners courants en aéronautique ne permet pas une reproduction fidèle de l'évolution de l'impédance mesurée par Aurégan et Leroux [6], ces derniers ayant mené leur étude avec un liner particulier. Aussi sommes-nous amené à nous poser la question s'il est possible d'approcher plus fidèlement le modèle d'impédance avec pertes visco-thermiques en améliorant notre méthode.

Jusqu'à présent, nous nous sommes basés sur un raisonnement physique : la méthode a été construite en considérant une propagation acoustique avec amortissement au sein des cavités et permet ainsi de reproduire une loi d'impédance du type :

$$Z(\omega) = R + i \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} + i \frac{\varepsilon}{2} \right) .$$

Plutôt que chercher à baser la méthode uniquement sur des considérations physiques, il pourrait être intéressant de simplement s'attacher à reproduire une loi fréquentielle d'impédance. À titre d'exemple on pourrait remplacer dans les éléments unidimensionnels les équations (7.11) par :

$$\partial_t \underline{\varphi} + a_0 \begin{pmatrix} 0 & f_1(y) \\ f_2(y) & 0 \end{pmatrix} \partial_y \underline{\varphi} + \frac{a_0 \varepsilon}{2h} \underline{\varphi} = 0.$$

Les fonctions  $f_1(y)$  et  $f_2(y)$  ainsi que les paramètres  $h$ ,  $R$  et  $\varepsilon$  seraient déterminés numériquement afin de reproduire au mieux une loi d'impédance donnée sur une gamme de fréquence. Il convient aussi d'imposer  $f_1(0) = f_2(0) = 1$  afin de conserver la propriété de consistance de l'adjoint.

Nous pouvons ainsi espérer reproduire plus fidèlement l'évolution fréquentielle de l'impédance d'un liner caractérisé par des pertes visco-thermiques importantes, le modèle EHR n'étant dans ce pas approprié.

Dans le même ordre idée, il est envisageable de remplacer la condition de paroi rigide au fond des cavités par une condition d'impédance  $Z_f(\omega) = R_f$ . Dans ce cas, la loi d'impédance serait :

$$Z(\omega) = R + \frac{R_f - i \tan \left( \frac{\omega h}{a_0} + i \frac{\varepsilon}{2} \right)}{1 - i R_f \tan \left( \frac{\omega h}{a_0} + i \frac{\varepsilon}{2} \right)}.$$



## CHAPITRE 8

# ÉTUDE D'UNE INSTABILITÉ SUR LINER EN PRÉSENCE D'ÉCOULEMENT CISAILLÉ PAR UNE APPROCHE NON MODALE

Les deux chapitres précédents ont permis de mettre en place les outils nécessaires à l'analyse modale et à l'étude de stabilité non modale dans le plan longitudinal d'un conduit, à savoir d'une part des conditions aux limites PML permettant de tronquer le domaine de calcul et d'autre part un modèle de liner utilisable en domaine temporel et permettant l'écriture sous forme linéaire du problème aux valeurs propres résultant de l'analyse modale.

Ce chapitre porte sur l'étude de stabilité non modale et l'analyse modale dans un conduit traité acoustiquement parcouru par un écoulement cisailé et fait ainsi appel aux outils développés lors des deux chapitres précédents. L'effort est porté dans un premier temps sur l'étude de stabilité non modale par recherche de la perturbation initiale optimale au travers de deux configurations, toutes les deux en présence d'un écoulement de Poiseuille. Pour la première configuration, le liner est caractérisé par une impédance réelle pure constante de faible valeur, cas pour lequel une analyse de stabilité locale effectuée en supposant le liner infini montre l'existence d'un mode hydrodynamique convectivement instable. Dans la deuxième configuration, en revanche, le liner est caractérisé par une loi fréquentielle d'impédance proche de celle mesurée par Aurégan et Leroux [6], loi pour laquelle une analyse de stabilité locale ne fait pas apparaître d'instabilité hydrodynamique avec l'écoulement de Poiseuille.

L'analyse de stabilité modale vise à mettre en lumière une éventuelle dynamique de type résonateur qui pourrait être comparée à l'instabilité absolue se développant sur un liner calculée par analyse de stabilité locale par Marx et Aurégan [96], en présence d'un écoulement cisailé représentatif de leur configuration.

## Sommaire

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>8.1</b> | <b>Présentation générale du cas d'étude</b>                                | <b>132</b> |
| <b>8.2</b> | <b>Recherche de la perturbation initiale optimale</b>                      | <b>133</b> |
| 8.2.1      | Choix de la méthode  | 133        |
| 8.2.2      | Présentation de la méthode   | 133        |
| <b>8.3</b> | <b>Étude préliminaire : cas simplifié d'une impédance réelle constante</b> | <b>136</b> |
| 8.3.1      | Présentation   | 136        |
| 8.3.2      | Étude de stabilité locale  | 136        |
| 8.3.3      | Étude stabilité non modale, liner de taille réduite                        | 137        |
| 8.3.4      | Étude de stabilité non modale, liner de «grande taille»                    | 141        |
| <b>8.4</b> | <b>Étude avec liner réaliste</b>   | <b>145</b> |
| 8.4.1      | Gain et perturbation initiale optimale                                     | 145        |
| 8.4.2      | Analyse temporelle et fréquentielle  | 146        |
| 8.4.3      | Autre fonction coût  | 148        |
| 8.4.4      | Amplification due à l'écoulement de Poiseuille seul                        | 149        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>8.5 Étude modale . . . . .</b>           | <b>149</b> |
| 8.5.1 Présentation du cas d'étude . . . . . | 149        |
| 8.5.2 Calcul de stabilité globale . . . . . | 151        |

## 8.1 Présentation générale du cas d'étude

Les différentes études menées dans ce chapitre sont conduites sur une géométrie générique schématisée figure 8.1. Cette géométrie est représentative des études menées précédemment et présentées en section 2.3.5. Le maillage est raffiné d'une part au voisinage du liner et encore plus fortement autour des deux discontinuités d'impédance. Un exemple de maillage est représenté figure 8.2 ; la géométrie étant symétrique par rapport au centre du liner, seule une moitié du maillage est tracée. Le domaine de calcul est formé du domaine physique, noté  $\Omega_0$ , et du domaine PML, noté  $\Omega_{pml}$ .

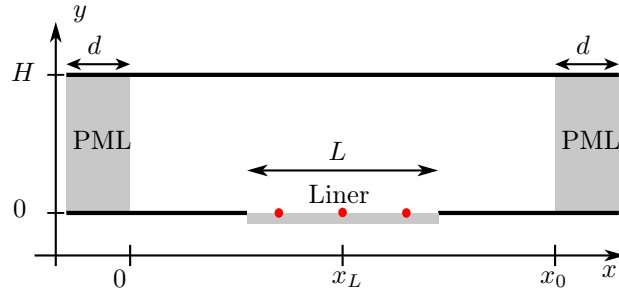


FIGURE 8.1 – Conduit de hauteur  $H$  revêtu d'un liner de longueur  $L$  et borné en amont et en aval par des domaines PML. Les points rouges correspondent aux positions des capteurs.

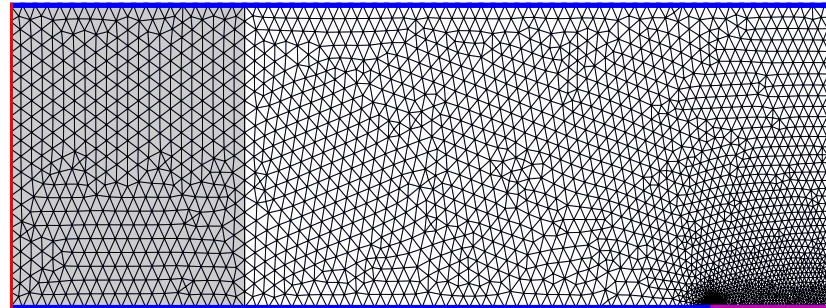


FIGURE 8.2 – Maillage associé à la partie amont de la géométrie représentée figure 8.1. Les conditions aux limites sont de type non réfléchissantes basées sur les caractéristiques (en rouge), paroi rigide (en bleu) et liner (violet). La zone grisée en amont représente le domaine PML.

Concernant l'écoulement porteur, nous avons choisi de nous restreindre au cas simplifié d'un écoulement de Poiseuille de Mach moyen  $\bar{M} = 0,2$  et donc de Mach maximum  $M = 0,3$ . On note  $V_{max} = Ma_0$ . L'écoulement de Poiseuille, bien qu'étant trop simple pour représenter l'écoulement réel au sein d'un banc d'essai, permet en première approximation de s'intéresser aux instabilités se développant dans un conduit traité acoustiquement traversé par un écoulement cisaillé. Ce modèle d'écoulement permet de se restreindre à l'utilisation de maillages relativement grossiers par rapport à des modèles d'écoulement plus réalistes (comme celui présenté ultérieurement en section 8.5.1). De plus, il semblerait que le cisaillement

de l'écoulement porteur soit le paramètre définissant la valeur limite de stabilité d'une couche PML (section 3.2.2.4). Il est ainsi prévisible que l'utilisation d'un écoulement fortement cisailé va imposer le choix d'une valeur faible de  $\sigma_0$  et donc une valeur importante de  $d$ , augmentant ainsi le coût du calcul.

Les paramètres des couches PML utilisés sont  $\sigma_0 H/a_0 = 20$ ,  $\beta = 1$  (comme en section 6.4.1) et  $d = H$ .

## 8.2 Recherche de la perturbation initiale optimale

### 8.2.1 Choix de la méthode

Parmi les différents outils permettant l'étude d'une instabilité de type amplificateur de bruit [139], la recherche de la perturbation initiale optimale a été privilégiée. Comme nous l'avons vu en section 2.3.4.2, cette méthode consiste à rechercher la perturbation initiale  $\underline{\varphi}_0 = \underline{\varphi}(t=0)$  d'énergie  $E_0 = E(0)$  maximisant l'énergie à l'instant  $E(T)$ . Le problème s'écrit ainsi :

$$G(T) = \max_{\underline{\varphi}_0} \frac{E(T)}{E_0},$$

où  $G(T)$  est appelé gain. L'énergie choisie ici est :

$$E(t) = \langle \underline{\varphi}(t); \underline{\varphi}(t) \rangle.$$

Cette énergie, cinétique et potentielle, est proche de celle utilisée par Cooper et Peake [42] et présente l'avantage d'être simple à manipuler.

Cette approche non modale permet par exemple d'étudier si le paquet d'onde correspondant initialement à la perturbation initiale optimale est formé par des composantes de pulsations différentes et donc soumises à une condition aux limites différentes (l'impédance dépendant de la fréquence). Il est aussi intéressant d'étudier où se situent les fréquences dominantes du paquet d'onde (s'il en existe) par rapport à la fréquence de résonance du liner étant donné que les études précédentes, présentées en section 2.3.5, ont montré que les instabilités sont observées en régime harmonique pour une pulsation d'excitation proche de la pulsation de résonance du liner.

Parmi les méthodes permettant le calcul de la recherche initiale optimale, présentées en section 2.3.4.2, la méthode par utilisation des multiplicateurs de Lagrange a été retenue et est présentée ci-dessous. Par rapport à une recherche par décomposition sur une base de vecteurs propres, cette méthode présente l'avantage de prendre en compte la dynamique complète de l'opérateur. De plus, le calcul par décomposition sur de base de vecteurs propres comme effectué par Ehrenstein et Gallaire [50] pour l'étude d'une couche limite de plaque plane n'est pas directement applicable dans notre cas. D'une part l'imposition d'une condition de Robin pose un problème d'un point de vue mathématique, les équations d'Euler linéarisées ne faisant apparaître que des dérivées d'ordre un en espace et de plus il s'agira de faire sortir en amont du domaine de calcul les ondes réfléchies par la rupture d'impédance. D'autre part, il se pose une question plus physique concernant l'onde à imposer en entrée de domaine via la condition de Robin : doit-elle être acoustique ou hydrodynamique ? De plus est-ce que la transformation de Gaster permettra d'obtenir un résultat indépendant de la pulsation autour de laquelle l'approximation linéaire est développée (voir [50, section 2.1]) ?

Par rapport aux études précédentes de croissance transitoire sur une couche limite, la particularité du problème considéré réside dans le caractère hydrodynamique. En effectuant une étude de stabilité locale dans une des sections rigides situées en amont et aval de la partie du conduit traitée acoustiquement, il est observé que la partie hydrodynamique du spectre se limite à un spectre continu lié à la couche critique [26]. De même, une analyse de stabilité locale dans la partie traitée acoustiquement en la considérant infinie montre que le spectre acoustique est composé d'un spectre continu lié à la couche critique et selon le liner considéré d'un mode hydrodynamique convectivement instable et de modes hydrodynamiques stables.

### 8.2.2 Présentation de la méthode

Comme nous l'avons vu en section 2.3.4.2, la recherche de la perturbation initiale optimale est un problème d'optimisation. Sa résolution peut être effectuée au moyen de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La fonction coût est l'énergie sur le sous-domaine  $\Omega_0$  à l'instant  $T$  et les contraintes sont d'une

part l'imposition des équations d'Euler linéarisées avec PML, associées aux multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\varphi}^*$  et  $\underline{\phi}^*$ , et d'autre part le fait d'avoir une énergie unitaire à l'instant initial  $t = 0$  sur le sous-domaine  $\Omega_0$ , contrainte associée au multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , et l'imposition d'avoir  $\underline{\phi}_0 = \underline{\phi}(0) = \underline{0}$ , contrainte associée au multiplicateur de Lagrange  $\underline{F}$ . Nous rappelons que  $\Omega_0$  est choisi comme étant le domaine physique c'est-à-dire  $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_{pml}$ . Le schéma Galerkin discontinu rendant équivalent la discrétisation des équations adjointes continues et la construction de l'adjoint des équations directes discrétisées, les études des problèmes continu et discret sont équivalentes et nous nous intéresserons ici au cas continu.

La fonctionnelle Lagrangienne s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{\varphi}; \underline{\varphi}^*; \underline{\phi}; \underline{\phi}^*; \lambda; \underline{F}) = & \mathcal{J} - \lambda \left( \langle \underline{\varphi}_0; \underline{\varphi}_0 \rangle_{\Omega_0} - 1 \right) - \langle \underline{\phi}_0; \underline{F} \rangle_{\Omega_{pml}} \\ & - \left( \tilde{H}(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) \Big| \underline{\varphi}^* \right)_{\Omega \times [0; T]} - \left( \tilde{H}'(\underline{\varphi}; \underline{\phi}) \Big| \underline{\phi}^* \right)_{\Omega_{pml} \times [0; T]}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

avec  $\mathcal{J}$  la fonction coût (égale à  $G(T)$  puisque  $E_0 = 1$ ) :

$$\mathcal{J} = \langle \underline{\varphi}(T); \underline{\varphi}(T) \rangle_{\Omega_0}. \quad (8.2)$$

➤ Remarque : Nous rappelons la définition des produits scalaires  $(\cdot | \cdot)_{\Omega \times [0; T]}$  et  $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\Omega}$ .

$$(\underline{\varphi}_1 | \underline{\varphi}_2)_{\Omega \times [0; T]} = \int_{[0; T]} \langle \underline{\varphi}_1; \underline{\varphi}_2 \rangle_{\Omega} dt = \int_{\Omega \times [0; T]} \underline{\varphi}_1 \cdot \underline{\varphi}_2 d\Omega dt.$$

L'utilisation du symbole  $*$  n'est pas innocente et sera justifiée ci-dessous. Le processus d'optimisation passe par la recherche d'un point stationnaire de  $\mathcal{L}$ . Celui-ci est obtenu lorsque, pour toute variable, la variation de  $\mathcal{L}$  par rapport à cette variable est nulle. Dans le cas d'une variable vectorielle, la différentiation est faite au sens de Gateaux (voir [60, section 3.3]). La différentielle de Gateaux de  $\mathcal{L}$  par rapport à une variable  $\underline{X}$  dans la direction  $\partial \underline{X}$  est :

$$d\mathcal{L} \Big|_{\underline{X}}(\delta \underline{X}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\underline{X} + \varepsilon \delta \underline{X}) - \mathcal{L}(\underline{X})}{\varepsilon}.$$

Le gradient de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\underline{X}$  est alors tel que :

$$\{\nabla_{\underline{X}} \mathcal{L} | \delta \underline{X}\} = d\mathcal{L} \Big|_{\underline{X}}(\delta \underline{X}),$$

où  $\{\cdot | \cdot\}$  est un produit scalaire (dépendant de la variable considérée  $\underline{X}$ ).

La stationnarité du Lagrangien par rapport aux variables  $\underline{\varphi}^*$  et  $\underline{\phi}^*$  traduit le fait que le couple  $(\underline{\varphi}; \underline{\phi})$  est solution du problème direct. De plus,  $\partial_{\lambda} \mathcal{L} \delta \lambda = 0$  et  $d\mathcal{L} \Big|_{\underline{F}}(\delta \underline{F})$  imposent respectivement :

$$\langle \underline{\varphi}_0; \underline{\varphi}_0 \rangle_{\Omega_0} = 1$$

et

$$\underline{\phi}_0 = \underline{0}.$$

Afin d'exprimer les différentielles relatives aux autres variables, une intégration par parties est effectuée :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{\varphi}; \underline{\varphi}^*; \underline{\phi}; \underline{\phi}^*; \lambda; \underline{F}) = & \langle \underline{\varphi}(T); \underline{\varphi}(T) \rangle_{\Omega_0} - \lambda \left( \langle \underline{\varphi}_0; \underline{\varphi}_0 \rangle_{\Omega_0} - 1 \right) - \langle \underline{\phi}_0; \underline{F} \rangle_{\Omega_{pml}} \\ & - \left( \underline{\varphi} \Big| \tilde{H}^*(\underline{\varphi}^*; \underline{\phi}^*) \right)_{\Omega \times [0; T]} - \left( \underline{\phi} \Big| \tilde{H}'^*(\underline{\varphi}^*; \underline{\phi}^*) \right)_{\Omega_{pml} \times [0; T]} \\ & - \left[ \langle \underline{\varphi}; \underline{\varphi}^* \rangle_{\Omega} \right]_0^T - \left[ \langle \underline{\phi}; \underline{\phi}^* \rangle_{\Omega_{pml}} \right]_0^T. \end{aligned}$$



Les différentielles de Gateaux  $d\mathcal{L}|_{\underline{\varphi}}(\delta\underline{\varphi})$  et  $d\mathcal{L}|_{\underline{\phi}}(\delta\underline{\phi})$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}|_{\underline{\varphi}}(\delta\underline{\varphi}) &= \left( \delta\underline{\varphi} \left| \tilde{H}^*(\underline{\varphi}^*; \underline{\phi}^*) \right. \right)_{\Omega \times [0; T]} - \left[ \langle \delta\underline{\varphi}; \underline{\varphi}^* \rangle_{\Omega} \right]_0^T - 2\lambda \langle \delta\underline{\varphi}; \underline{\varphi} \rangle_{\Omega_0} \Big|_{t=0} + 2 \langle \delta\underline{\varphi}; \underline{\varphi} \rangle_{\Omega_0} \Big|_{t=T}, \\ d\mathcal{L}|_{\underline{\phi}}(\delta\underline{\phi}) &= \left( \delta\underline{\phi} \left| \tilde{H}'^*(\underline{\varphi}^*; \underline{\phi}^*) \right. \right)_{\Omega_{pml} \times [0; T]} - \left[ \langle \delta\underline{\phi}; \underline{\phi}^* \rangle_{\Omega_{pml}} \right]_0^T - \langle \delta\underline{\phi}; \underline{F} \rangle_{\Omega_{pml}} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

L'annulation des différentielles impose d'une part au couple  $(\underline{\varphi}^*; \underline{\phi}^*)$  de satisfaire les équations adjointes, d'où le choix de les noter avec l'exposant \*. D'autre part, les conditions suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}^*(T) &= 2\underline{\varphi}(T) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0 \\ &= \underline{0} \quad \forall \underline{x} \notin \Omega_0 \end{aligned} \tag{8.3a}$$

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_0 &= \underline{\varphi}_0^*/(2\lambda) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0, \\ &= \underline{0} \quad \forall \underline{x} \notin \Omega_0 \end{aligned} \tag{8.3b}$$

$$\begin{aligned} \underline{\phi}^*(T) &= \underline{0}, \\ \underline{\phi}^*(0) &= \underline{F}. \end{aligned} \tag{8.3c}$$

La combinaison de l'équation eq. (8.3b) et de la condition  $\|\underline{\varphi}_0\|_{\Omega_0} = 1$  mène à la relation :

$$\lambda = \frac{\|\underline{\varphi}_0^*\|_{\Omega_0}}{2},$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_0 &= \underline{\varphi}_0^*/\|\underline{\varphi}_0^*\| \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0, \\ &= \underline{0} \quad \forall \underline{x} \notin \Omega_0. \end{aligned}$$

Deux méthodes peuvent alors être choisies pour conduire la recherche de la perturbation initiale optimale :

❶ Un algorithme d'optimisation est utilisé pour déterminer  $\underline{\varphi}_0$  à l'itération suivante à partir du gradient par rapport à  $\underline{\varphi}_0$  de la fonctionnelle Lagrangienne [139] (ou même de la fonction coût [43] si celle-ci est choisie comme étant  $\langle \underline{\varphi}(T); \underline{\varphi}(T) \rangle_{\Omega_0} / \langle \underline{\varphi}(0); \underline{\varphi}(0) \rangle_{\Omega_0}$ ). Mao et collab. [92] se sont attachés à montrer que la même solution est obtenue quelle que soit la méthode d'optimisation : la méthode de descente rapide, la méthode du gradient conjugué ou encore la méthode de Quasi-Newton BFGS (aucune mention n'est faite en revanche en terme de performance).

❷ L'initialisation de l'itération suivante est donnée par  $\underline{\varphi}_0 = \underline{\varphi}_0^*/(2\lambda)$  sur  $\Omega_0$  et 0 sinon. Le processus itératif est représenté figure 8.3. D'après Corbett et Bottaro [43, section 4], cette méthode est équivalente à la première appliquée avec un algorithme de descente rapide dans le cas où le gradient considéré est celui de la fonction coût.

Les deux méthodes requièrent l'application des opérateurs d'évolution temporelle direct et adjoint.

Nous avons opté pour la seconde méthode. À noter que l'équation  $\underline{\varphi}^*(T) = 2\underline{\varphi}(T)$  peut être remplacée par  $\underline{\varphi}^*(T) = \underline{\varphi}(T)$  étant donné que l'opérateur  $\underline{T}^*$  est linéaire et que la solution est ensuite normalisée. Comme le font remarquer Monokrousos et collab. [100], cette méthode est équivalente au calcul de la valeur propre de plus grand module de l'opérateur

$$\underline{P}(\Omega_0)\underline{T}^*(T)\underline{T}(T)$$

au moyen de la méthode de la puissance itérée, où  $\underline{P}(\Omega_0)$  est l'opérateur de projection sur  $\Omega_0$ ,  $\underline{T}(T)$  est l'opérateur d'évolution temporelle (défini eq. (2.4)) et  $\underline{T}^*(T)$  son adjoint. Nous retrouvons alors le raisonnement développé en section 2.3.4.2 et cette valeur propre de plus grand module nous donne directement la valeur de  $E(T)^2/E_0^2$ .

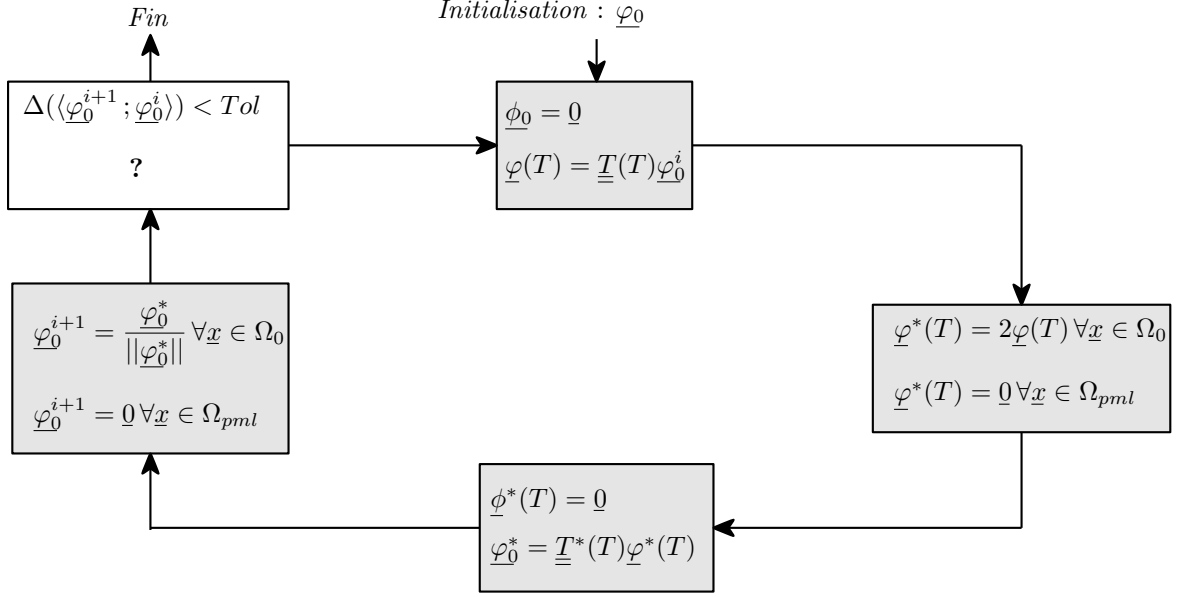


FIGURE 8.3 – Processus itératif de calcul de la perturbation initiale optimale.

Le gain  $G(T)$  est obtenu en propageant entre  $t = 0$  et  $t = T$  la perturbation initiale optimale maximisant l'énergie au temps  $T$ . La recherche de la perturbation initiale optimale (et du gain associé) est effectuée pour de multiples horizons temporels afin d'obtenir l'évolution de  $G(T)$ . La dynamique instable étant de type amplificateur de bruit, la courbe  $G(T)$  est généralement caractérisée par une phase de croissance précédant l'obtention d'un maximum puis une phase de décroissance [1, section 4] (d'autres types d'évolutions peuvent être obtenues, comme dans la référence [78] par exemple).

D'un point de vue pratique, un premier calcul est effectué pour une faible valeur de l'horizon temporel  $T$  en initialisant  $\varphi_0$  par une perturbation n'existant que dans le voisinage du liner. Les calculs pour les horizons temporels suivants sont effectués en initialisant le vecteur  $\varphi_0$  à partir de la solution précédemment obtenue.

➤ Remarque : Il est aussi possible de choisir comme fonction coût directement le rapport entre des énergies sur le sous domaine  $\Omega_0$  aux instants  $t = T$  et  $t = 0$  [92]. Dans ce cas la contrainte d'énergie unitaire n'est plus nécessaire.

## 8.3 Étude préliminaire : cas simplifié d'une impédance réelle constante

### 8.3.1 Présentation

Afin de mettre en évidence les difficultés et particularités du calcul de la perturbation initiale optimale, nous nous intéressons dans un premier temps au cas simplifié où le liner est simplement modélisé par une impédance réelle constante :  $Z(\omega) = R = 0,01$ . Cette loi d'impédance, bien que ne correspondant pas à un liner réaliste, satisfait bien les quatre conditions pour être admissible [131, section 3]. Nous rappelons que le conduit est traversé par un écoulement de Poiseuille de Mach moyen  $M = 0,2$ .

### 8.3.2 Étude de stabilité locale

En supposant le liner infini, il est possible de conduire une étude de stabilité locale (présentée en section 2.3.2.1). La perturbation est mise sous la forme  $\varphi = \varphi \exp(i(kx - \omega t))$  et le mode propre  $(k; \varphi)$  est déterminé par résolution du problème aux valeurs propres :

$$-i\omega\varphi + \underline{\underline{A}}_y\partial_y\varphi + \underline{\underline{B}}\varphi = -ik\underline{\underline{A}}_x\varphi ,$$

où la pulsation  $\omega$  est fixée.  $\underline{A}_j$ ,  $\underline{B}$  et  $\underline{\varphi}$  correspondent au cas longitudinal (voir section 2.1.2).

Les calculs de stabilité locale sont effectués à l'aide du module MAMOUT [28]. Celui-ci est basé sur une méthode de collocation spectrale par les polynômes de Chebyshev. En plus du calcul des valeurs propres du problème, MAMOUT offre la possibilité de suivre une valeur propre en balayant sur un paramètre par déshomogénéisation du problème.

Le spectre obtenu pour  $\omega H/V_{max} = 2,94$  est tracé figure 8.4. Afin de s'assurer que le mode de valeur propre  $kH \approx 6,1 - 2,0i$  se propage bien vers les  $x$  positifs et est donc bien instable, un suivi est effectué en faisant varier  $\omega H/V_{max}$  de  $2,94$  à  $2,94 + 49i$  (voir figure 8.4) et permet de conclure par le critère Briggs-Bers que le mode correspond bien à une instabilité convective. De plus, nous effectuons de même deux balayages sur  $\omega H/V_{max}$  entre  $2,94$  et  $4,9 \times 10^{-3}$  ainsi que sur  $\omega H/V_{max}$  entre  $2,94$  et  $49$  afin d'étudier l'évolution du mode hydrodynamique en fonction de la fréquence. Il est observé que le mode hydrodynamique n'est instable que sur une gamme de pulsation et présente un taux de croissance le plus élevé pour  $\omega = \omega_{max} = 2,94V_{max}/H$  et nous notons  $k_{max} = (6,1 - 2,0i)/H$  ( $\lambda_{max} = (0,93 + 0,30i)H$ ). De plus pour  $\omega \rightarrow 0$  ou  $\omega \rightarrow \infty$ , le mode rejoint la branche continue du spectre (le spectre obtenu pour  $\omega H/V_{max} = 4,9 \times 10^{-3}$  est tracé figure 8.4). Le comportement fréquentiel est ainsi différent de celui observé par Boyer et collab. [16].

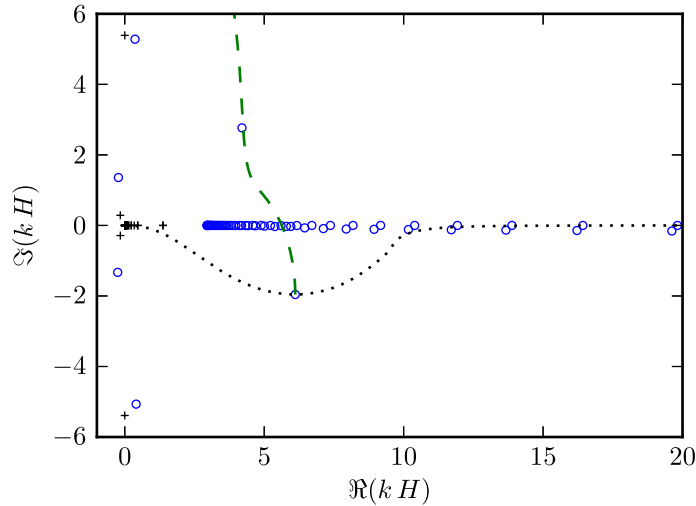


FIGURE 8.4 – Spectre des nombres d'ondes  $kH$ . Les symboles  $\circ$  et  $+$  correspondent aux valeurs propres obtenues pour  $\omega H/V_{max} = 2,94$  et  $\omega H/V_{max} = 4,9 \times 10^{-3}$  respectivement, la courbe  $---$  correspond au balayage sur  $\omega H/V_{max} \in [2,94; 2,94 + 49i]$ , la courbe  $\cdots$  correspond au balayages  $\omega H/V_{max} \in [2,94; 4,9 \times 10^{-3}]$  et  $\omega H/V_{max} \in [2,94; 49]$ .

### 8.3.3 Étude stabilité non modale, liner de taille réduite

Une première série de calcul est effectuée avec un liner de taille  $L = H$ . S'il est envisageable de retrouver les résultats de stabilité locale présentés en section 8.3.2 à partir d'une étude non modale cela n'est réalisable que dans le cas où le liner est sensiblement plus grand que la longueur d'onde de l'instabilité. La présente configuration n'est donc pas utilisable à des fins de comparaison avec la stabilité locale mais permet en revanche une première étude pour un coût numérique moins important.

Une première série de calculs est effectuée en prenant  $x_0 - (x_L + L/2) = 2H$  (taille des portions de conduit situées entre la zone traitée et les domaines PML, voir figure 8.1). L'intégration temporelle est faite par le schéma Crank-Nicolson (voir section 6.3) avec comme pas de temps  $\Delta t V_{max}/H = 2,04 \times 10^{-3}$ . Figure 8.5 est tracé le gain maximal calculé pour cette configuration. Le gain maximal est atteint pour  $TV_{max}/H \approx 6$ , le champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  de la perturbation initiale optimale associée est tracé figure 8.6(a). Le paquet d'onde initial est localisé en amont du liner et sur la moitié amont de celui-ci, un zoom sur cette région est tracé figure 8.6(b). Le champ est relativement « propre » au dessus du liner tandis qu'en

amont de celui-ci le champ semble être bruité. Un calcul avec un maillage plus raffiné (figure 8.6(c)) semble indiquer que cela provient d'un phénomène de petites échelles spatiales nécessitant l'utilisation d'un maillage plus fin.

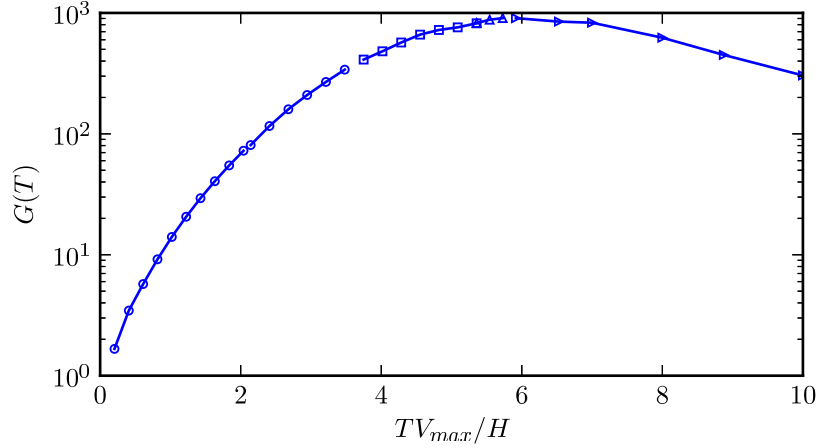


FIGURE 8.5 – Amplification maximale  $G(T)$ .

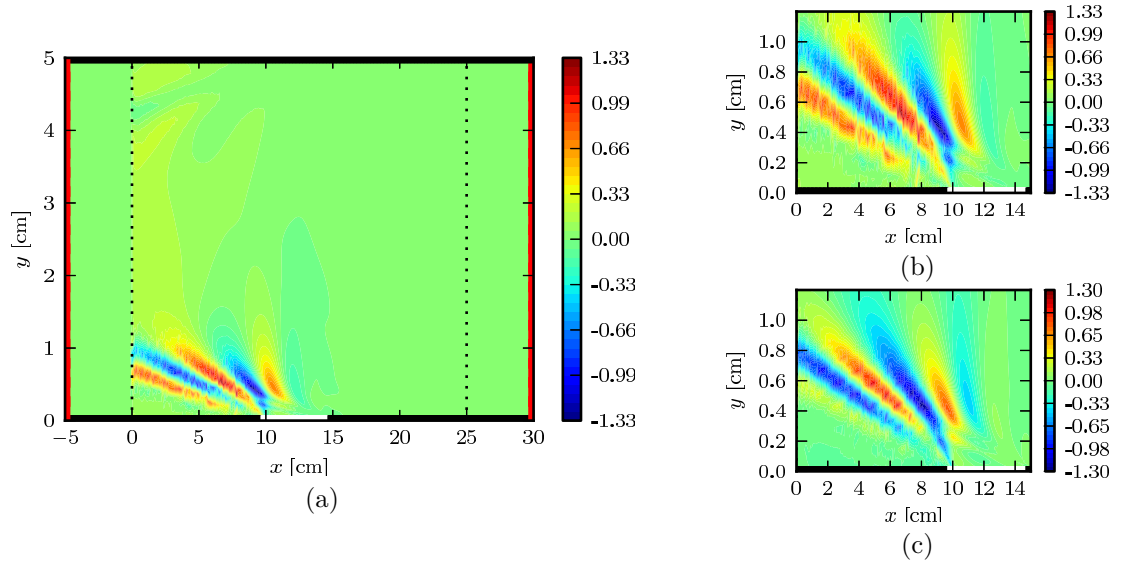
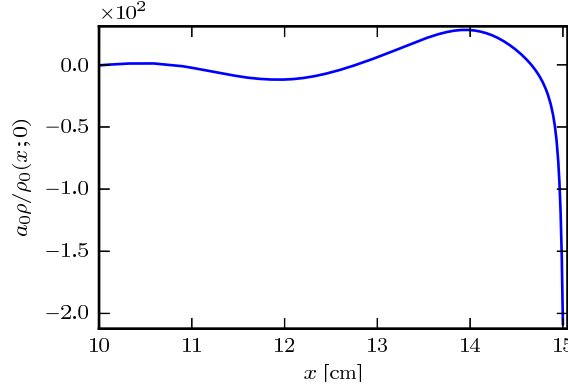


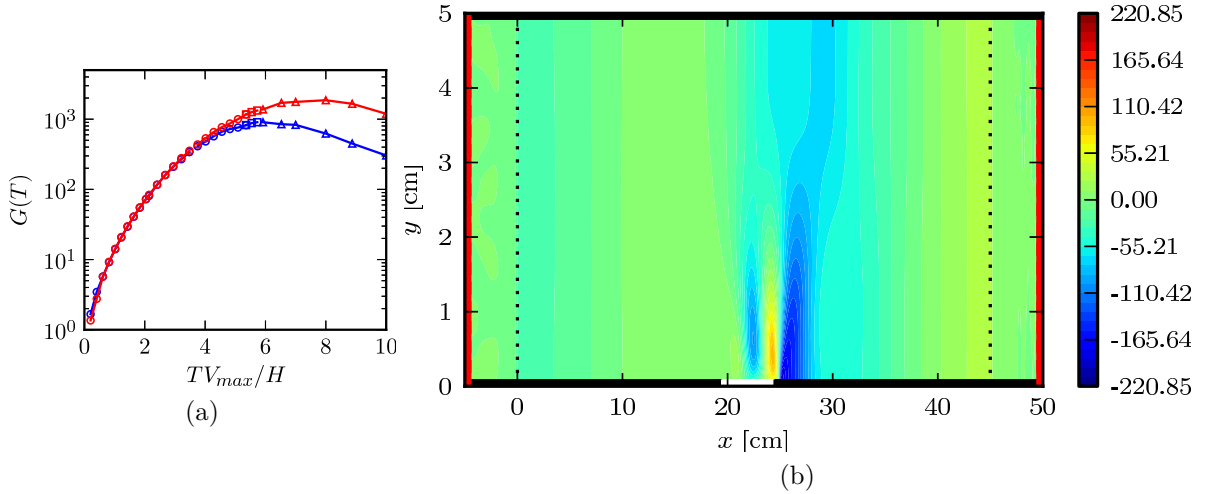
FIGURE 8.6 – Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  de la perturbation initiale optimale maximisant le gain à  $TV_{max}/H \approx 6$  (a). Zoom pour le même maillage (b) et pour un maillage plus raffiné (c). Les lignes pointillées correspondent aux interfaces entre le domaine physique et les couches PML. Les conditions aux limites sont de type paroi rigide (en noir), impédance (en blanc), non réfléchissantes basées sur les caractéristiques (en rouge).

Sur la figure 8.7 est tracée l'évolution de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sur le liner. En supposant que  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  suit une évolution en  $\cos(\Re(k)x) \exp(-\Im(k)x)$ , nous trouvons à partir des positions et valeurs des ventres de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$   $kH = 11,1 - 0,1i$  (l'analyse de stabilité section 8.3.2 donne  $k^{max}H = 6,1 - 2i$ ).

Afin d'évaluer l'effet de la taille du domaine physique, des calculs sont effectués en prenant des portions rigides en amont et aval du liner deux fois plus grandes ( $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$ ). La courbe de gain obtenue sur ce maillage est comparée à celle précédemment obtenue ( $x_0 - (x_L + L/2) = 2H$ ) sur la figure 8.8(a). Un comportement similaire est observé jusqu'à  $TV_{max}/H \approx 4$ , le gain maximal à un instant  $T$  étant ensuite plus important dans le cas où les portions rigides en amont et aval sont plus


 FIGURE 8.7 – Évolution de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sur le liner.

grandes. Il est observé de plus que le gain maximal est obtenu à un temps ultérieur. Afin de comprendre cette dépendance par rapport à  $x_0 - (x_L + L/2)$ , le champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  associé à la perturbation d'énergie maximale obtenue pour  $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$  est tracé figure 8.8(b). Une forte amplification est observée au niveau de la rupture d'impédance aval sur la figure 8.8(b). En aval du liner semble se propager un mode acoustique plan généré par l'instabilité hydrodynamique. L'écart entre les deux courbes de gain correspond ainsi au rayonnement acoustique entre  $x_L + L/2 + 2H$  et  $x_L + L/2 + 4H$ .


 FIGURE 8.8 – (a) : Amplification maximale  $G(T)$  obtenue avec  $x_0 - (x_L + L/2) = 2H$  (en bleu) et  $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$  (en rouge). (b) Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  d'énergie maximale pour  $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$ .

L'indépendance de la valeur du gain à un instant  $T$  par rapport à la taille des portions rigides amont et aval est obtenue pour  $x_0 - (x_L + L/2) > (a_0 + V_{max})T$ . Cependant, cela suppose l'utilisation de domaines de calcul de grandes tailles et implique donc un coût numérique important. L'autre solution consisterait à ne s'intéresser qu'à la nature hydrodynamique de l'écoulement ce qui n'est pas évident. Plusieurs pistes sont néanmoins envisageables :

❶ Il peut être intéressant de considérer comme fonction coût  $\mathcal{J}$  non pas l'énergie totale comme choisie dans ce travail de thèse mais plutôt la norme de la vorticité  $\underline{\Psi} = \nabla \wedge \underline{u}$ , cette dernière étant intimement liée au caractère hydrodynamique. La difficulté r s de alors dans la recherche d'un point stationnaire de la fonctionnelle Lagrangienne. En effet, la différentielle de Gateaux de  $\mathcal{J} = \langle \underline{\Psi}; \underline{\Psi} \rangle_{\Omega_0}$  est :

$$d\mathcal{J}|_{\underline{\varphi}}(\delta\underline{\varphi}) = 2\langle \nabla \wedge \underline{\varphi}; \nabla \wedge \delta\underline{\varphi} \rangle_{\Omega_0}.$$

Il n'est ainsi pas possible de définir le gradient  $\nabla_{\underline{\varphi}} \mathcal{J}$  tel que :

$$\langle \nabla_{\underline{\varphi}} \mathcal{J} ; \delta \underline{\varphi} \rangle_{\Omega_0} = d \mathcal{J} \Big|_{\underline{\varphi}} (\delta \underline{\varphi}) .$$

De plus, le tracé du champ de vorticité de la perturbation acoustique ne fait apparaître qu'un pic de très grande amplitude localisé au niveau de la rupture d'impédance aval, vraisemblablement dû au caractère singulier de la perturbation acoustique en ce point. Il serait ainsi nécessaire d'exclure cette zone de la fonction c  t.

  L'utilisation d'autres solveurs qu'EMILE pourrait être envisagée. Un solveur incompressible permettrait de s'affranchir du caractère acoustique et de se focaliser sur l'instabilité hydrodynamique, celle-ci n'étant que faiblement influencée par la compressibilité [126, 133, 93]. La résolution du problème par une approche mixte Eulérienne/Lagrangienne permettrait d'aisément séparer énergie acoustique et énergie hydrodynamique (voir section 2.3.1.1). De plus, cette approche permettant d'écrire une équation de l'énergie sous forme conservative, il serait possible d'effectuer des calculs indépendants de la taille des zones rigides en amont et aval du liner en intégrant au cours du temps les flux d'énergie en amont et aval.

Nous avons souhaité de plus nous intéresser au cas où la perturbation initiale optimale est cherchée de façon à maximiser l'énergie dans une région du conduit seulement et non plus dans son ensemble. Pour cela, nous redéfinissons la fonction c  t  $\mathcal{J}$  telle que :

$$\mathcal{J} = \langle \underline{\varphi}(T) ; f \underline{\varphi}(T) \rangle_{\Omega_0} , \quad (8.4)$$

où la fonction  $f(\underline{x})$  permet de définir la région de l'espace où doit être maximisée l'énergie. Nous avons choisi [38, eq. (57)] :

$$f(x; y) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{|x - x_L| - \frac{L}{2}}{\frac{L}{20}} \right) \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{|y| - \frac{H}{5}}{\frac{H}{50}} \right) \right) . \quad (8.5)$$

Ainsi définie cette fonction permet de ne s'intéresser qu'à l'énergie dans le voisinage du liner  $(x; y) \in [x_L - L/2; x_L + L/2] \times [0; H/5]$ , voir figures 8.9(a)(b).

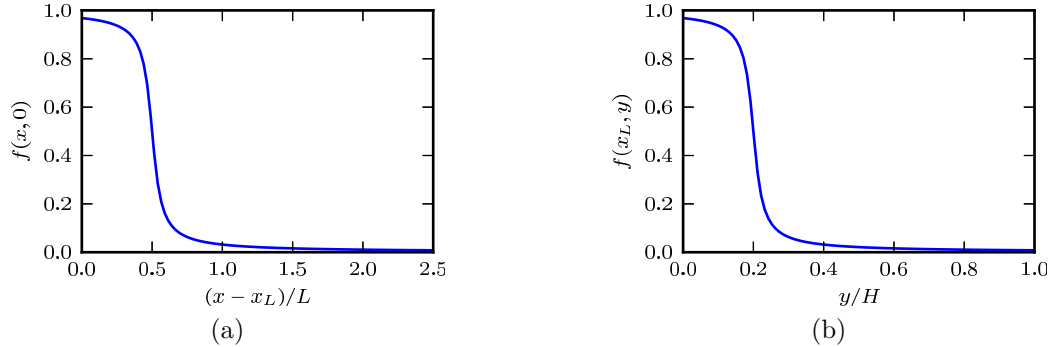


FIGURE 8.9 – Fonction  $f(\underline{x})$ , évolution en  $x$  (a) et en  $y$  (b).

Lors du processus d'optimisation, cela revient simplement à remplacer l'équation (8.3a) par :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}^*(T) &= 2 f(\underline{x}) \underline{\varphi}(T) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0 \\ &= \underline{0} \quad \forall \underline{x} \notin \Omega_0 . \end{aligned}$$

Figure 8.10 sont comparés les gains obtenus avec et sans pondération de l'énergie par  $f$  et pour les deux tailles de domaines amont et aval  $x_0 - (x_L + L/2) = 2H$  et  $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$  (avec pondération, la définition du gain  $G(T)$  reste la même :  $G(T) = E(T)/E_0$ ). Les courbes sont quasiment superposées avec et sans pondération. Nous pouvons ainsi supposer que même sans pondérer la fonction c  t par  $f$ , l'instabilité hydrodynamique est maximisée. Celle-ci étant responsable du rayonnement acoustique en amont et aval du liner (comme nous le verrons en section 8.3.4.3), la maximisation de l'instabilité hydrodynamique se développant sur le liner implique la maximisation de l'énergie en amont et aval du liner, c'est-à-dire dans tout le domaine.

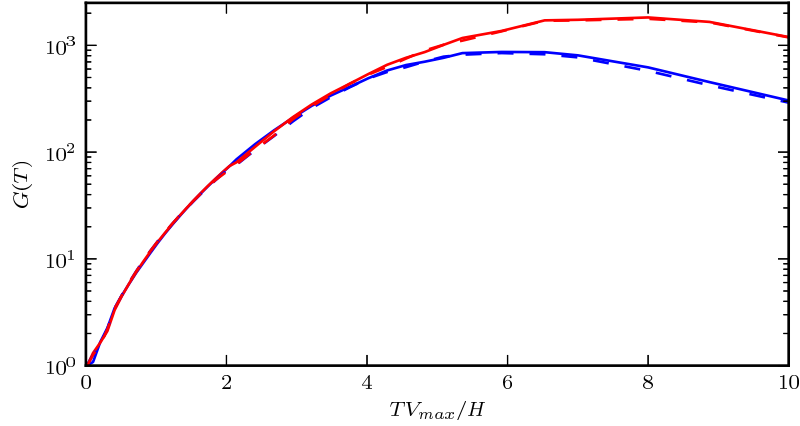


FIGURE 8.10 – Amplification maximale  $G(T)$  obtenue avec  $x_0 - (x_L + L/2) = 2H$  (en bleu) et  $x_0 - (x_L + L/2) = 4H$  (en rouge), avec (ligne pointillée) et sans pondération (trait continu) de l'énergie par  $f$ .

### 8.3.4 Étude de stabilité non modale, liner de «grande taille»

#### 8.3.4.1 Gain et perturbation initiale optimale

Afin de réaliser des comparaisons avec les résultats obtenus dans le cadre de la stabilité locale, une série de calculs est réalisée en prenant un liner plus étendu :  $L = 4H$  (soit environ quatre longueurs d'onde de l'instabilité hydrodynamique car  $\Re(\lambda_{max}) = 0,93H$ , voir section 8.3.2). Les sections à paroi rigide en amont et aval du liner ont pour longueur  $x_0 - (x_L + L/2) = 8H$ . Comme précédemment le schéma temporel implicite Crank-Nicolson est choisi (voir section 6.3) avec comme pas de temps  $\Delta t V_{max}/H = 2,04 \times 10^{-3}$ .

Sur la figure 8.11 est tracée  $G$  en fonction de  $T$ . Le gain est une fonction croissante de  $T$  jusqu'à  $TV_{max}/H = 29$ , valeur pour laquelle un maximum est atteint, puis est décroissante. À noter que  $G(T)$  atteint des valeurs bien plus élevées qu'avec le liner de taille réduite, cela étant probablement dû à la taille plus grande de  $\Omega_0$  (aussi bien le liner que les portions rigides sont plus grands). Sur la figure 8.12(a) est représentée la perturbation initiale menant au gain maximal à  $TV_{max}/H = 29$ . Celle-ci est qualitativement comparable à celle représentée précédemment en figure 8.6 : la perturbation est localisée sur la partie amont du liner et sur la partie rigide voisine de la rupture d'impédance amont. De plus, il est à nouveau observé que le champ est «propre» au dessus du liner et semble nécessiter un raffinement plus important du maillage sur la partie rigide amont. La propagation de cette perturbation initiale donne le champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  représenté figure 8.12(b) à  $TV_{max}/H = 29$ . Comme dans le cas du liner de taille réduite (voir figure 8.8(b)), une forte amplification est observée à la rupture d'impédance aval. De plus, nous observons que l'instabilité rayonne un mode plan acoustique, nous reviendrons sur ce point plus loin.

Sur les figures 8.13(a)(b)(c) sont représentées les évolutions de  $u(x; 0)$ ,  $v(x; 0)$  et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; 0)$  du champ

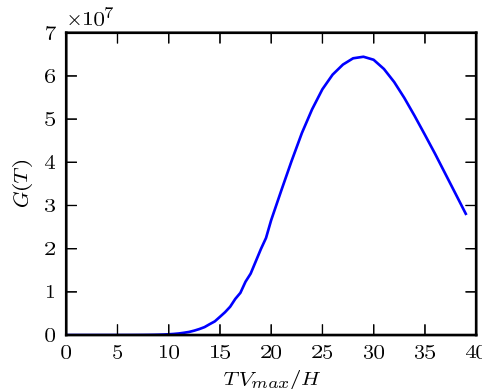


FIGURE 8.11 – Amplification maximale  $G(T)$ .

d'énergie maximale à  $TV_{max}/H = 29$ . Une forte singularité est observée à la rupture d'impédance aval.

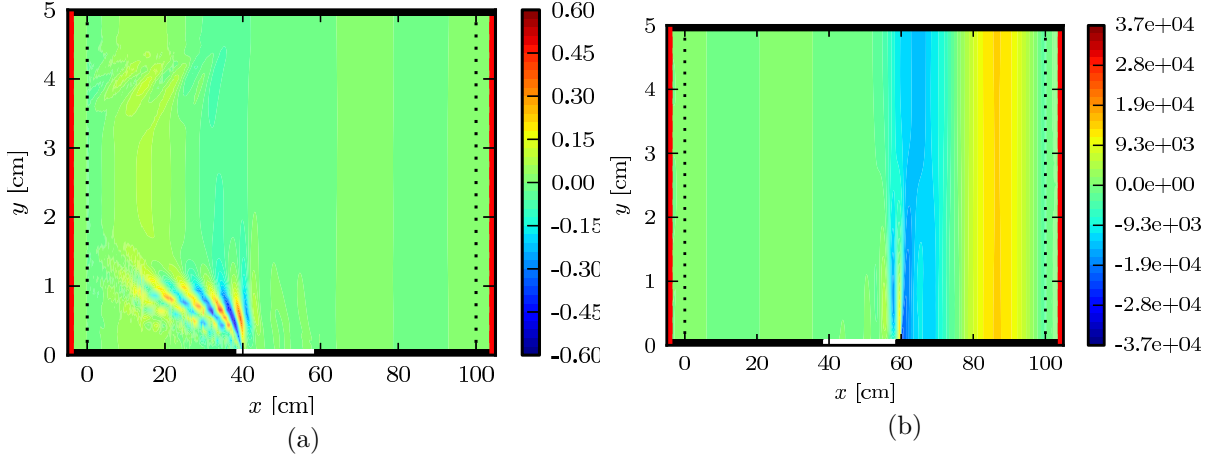


FIGURE 8.12 – Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  de la perturbation initiale maximisant le gain à  $TV_{max}/H = 29$  (a) et champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenu à  $TV_{max}/H = 29$  par propagation de cette perturbation initiale.

Bien que moins importante que sur  $u$  et  $v$ , une singularité est aussi observable sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  alors qu'au chapitre 5 il avait été trouvé que le caractère singulier est bien moins marqué sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ . Au vu de ces résultats, il serait intéressant de reproduire ces calculs en raffinant fortement le maillage dans le voisinage de la discontinuité d'impédance aval ainsi qu'en imposant la condition d'orthogonalité étudiée en section 5.2. Celle-ci s'est avérée être peu utile lors du calcul modal dans une section transverse mais la situation est ici différente, notamment du fait de l'existence d'une instabilité hydrodynamique se développant sur le liner.

Sur la figure 8.14(a) est représentée l'évolution de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sur le liner. En supposant une amplification spa-

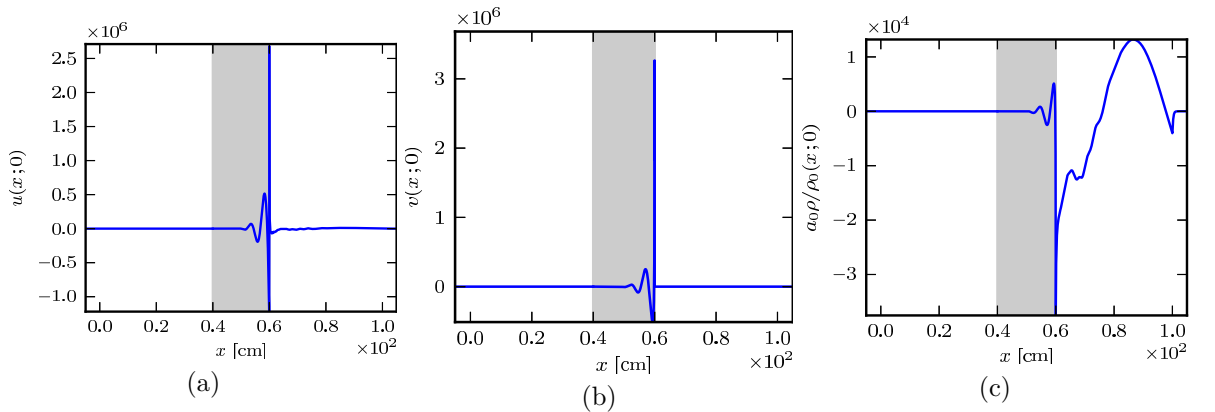


FIGURE 8.13 – Évolutions de  $u$ (a),  $v$ (b) et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ (c) sur la paroi inférieure du champ d'énergie maximale à  $TV_{max}/H = 29$ . La zone grisée correspond à la position du liner.

tiale de l'amplitude en  $\exp(-\Im(k)x)$ , nous trouvons  $\Im(k)H = -2,05$  à partir des positions et valeurs des pics. De plus, en effectuant une FFT (voir figure 8.14) nous obtenons un pic en  $\Re(k)H = 6,3$ . Ces valeurs sont comparables au nombre d'onde de plus grand taux d'amplification  $k_{max}H = 6,1 - 2,0i$  trouvé au moyen d'une analyse de stabilité locale en section 8.3.2, alors même que dans ce cas le liner était considéré comme infini.

#### 8.3.4.2 Analyse temporelle et fréquentielle

Afin d'étudier l'évolution temporelle du paquet d'onde optimal, nous effectuons des mesures de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  à l'aide des capteurs représentés figure 8.1 lors de la propagation de la perturbation initiale maximisant le gain à  $TV_{max}/H = 29$  entre  $t = 0$  et  $t = 29H/V_{max}$ . La période d'échantillonnage des capteurs



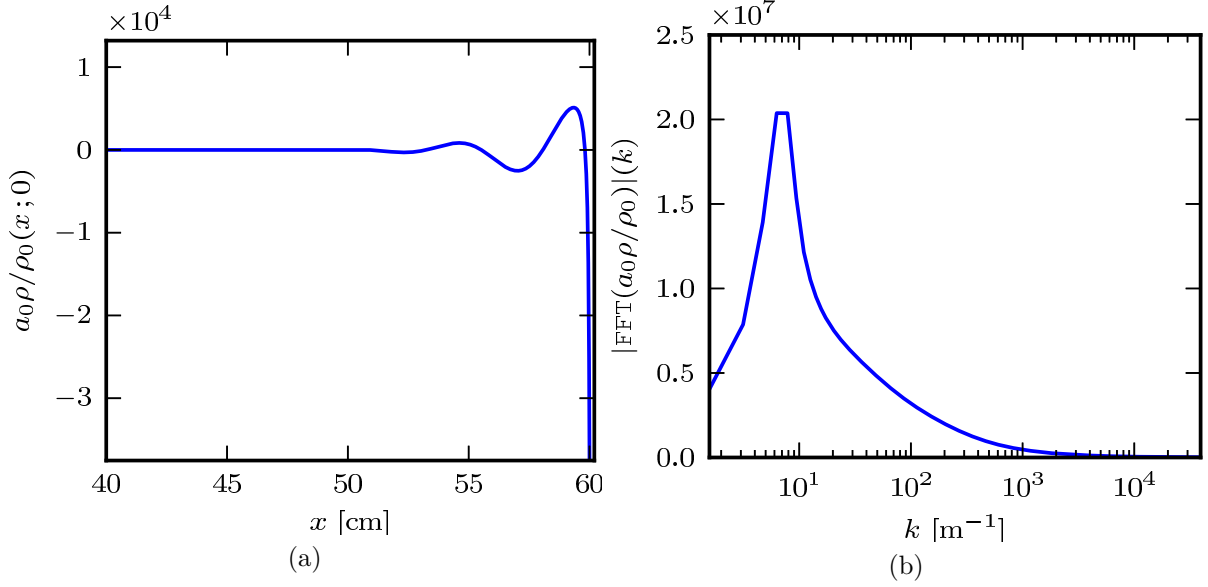


FIGURE 8.14 – Évolutions de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sur le liner (a), transformée de Fourier de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x)$  sur le liner (b).

est  $T_e V_{max}/H = 40,8 \times 10^{-3}$  (valeur quatre fois plus élevée que le pas temporel). Les signaux mesurés par ces trois capteurs sont tracés figures 8.15(a)(b)(c). Nous observons une croissance de l'amplitude de l'enveloppe du paquet d'onde lors de sa propagation sur le liner. De plus, après le passage du paquet d'onde, une deuxième amplification est observée sur le capteur positionné en  $x_L - L/4$  à partir de  $t \approx 10^{-2}$  s. Nous ignorons à quoi correspond ce phénomène et il serait intéressant à l'avenir de l'étudier. Le maximum de l'enveloppe se déplace à la vitesse  $c_g = 0,15V_{max}$  proche de la vitesse de groupe mesurée à partir de la stabilité locale  $c_g = 0,142V_{max}$ . Les signaux temporels font apparaître une fréquence que nous cherchons à déterminer en effectuant une transformée de Fourier rapide des signaux, voir figure 8.16. L'analyse spectrale montre ainsi pour les trois signaux la présence d'un pic à  $\omega H/V_{max} = 3$ . Cette pulsation est proche de la pulsation  $\omega H/V_{max} = 2,9$  obtenue dans le cadre de la stabilité locale (voir section 8.3.2) et menant au nombre d'onde de plus grande amplification spatiale.

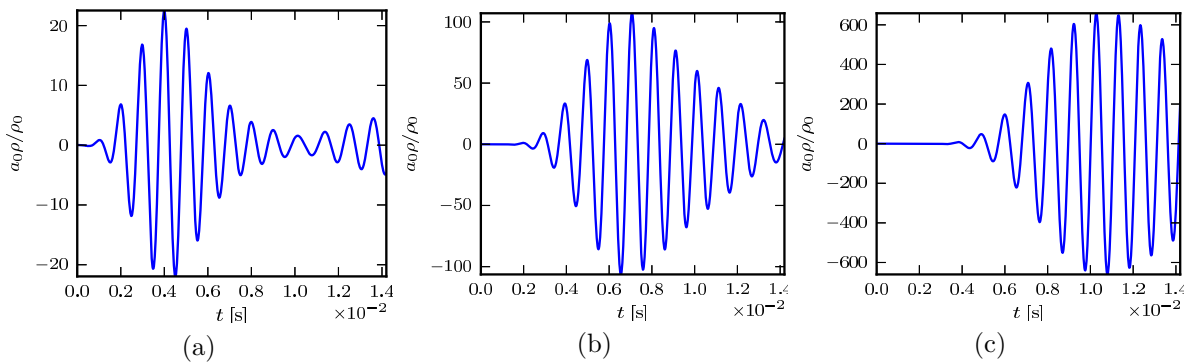


FIGURE 8.15 – Mesures de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  par les capteurs situés en  $x_L - L/4$ (a),  $x_L$ (b) et  $x_L + L/4$ (c).

#### 8.3.4.3 Rayonnement acoustique

À partir du champ figure 8.12, il a été observé que l'instabilité hydrodynamique rayonne un mode acoustique plan en aval du liner. Dans cette section est étudié le rayonnement acoustique en amont et aval du liner à partir de l'évolution de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sur la paroi inférieure. Sur les figures 8.17(a) et (b) sont respectivement tracées les évolutions de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x;0)$  en amont et aval du liner. L'évolution en amont du

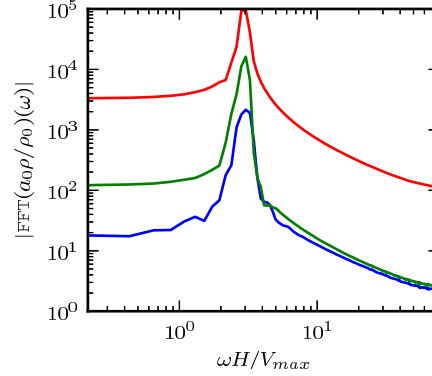


FIGURE 8.16 – Transformées de Fourier rapides des signaux temporels de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  mesurés sur le capteur en  $x_L - L/4$  (en bleu),  $x_L$  (en vert) et en  $x_L + L/4$  (en rouge).

liner décrit une évolution sinusoïdale. À partir de la position des ventres  $x \approx 1,3$  cm et  $x \approx 2,8$  cm, la longueur d'onde  $\lambda^- = 5,8H$  est estimée. L'évolution de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; 0)$  en aval du liner est en revanche moins propre et nécessite, comme nous l'avons vu précédemment, de raffiner encore le maillage. Il est néanmoins possible de déterminer une longueur d'onde  $\lambda^+ = 8,6H$  à partir des nœuds positionnés en  $x \approx 76$  cm et  $x \approx 95$  cm.

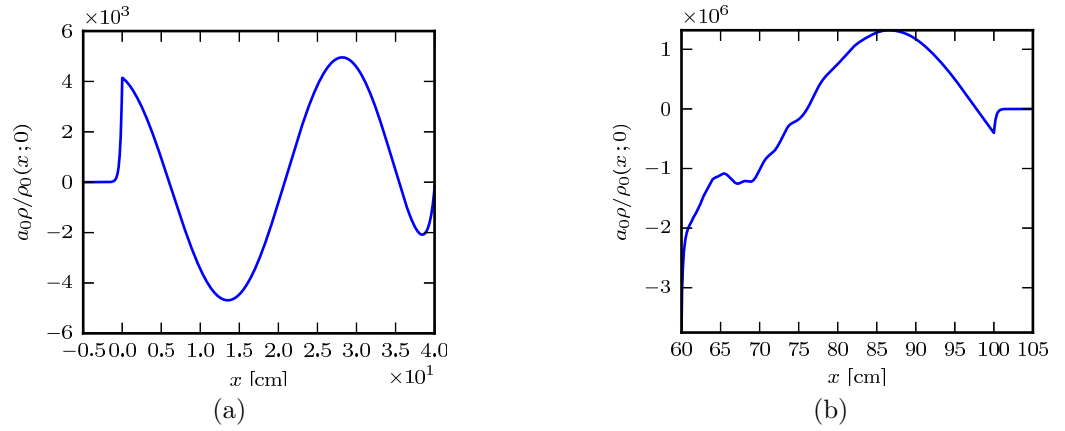


FIGURE 8.17 – Évolution de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; 0)$  en amont (a) et aval (b) du liner.

À partir du solveur modal MAMOUT, les longueurs d'onde des modes acoustiques se propageant dans un conduit de hauteur  $H$  portant un écoulement de Poiseuille de Mach moyen  $\bar{M} = 0,2$  sont déterminés pour une source de pulsation  $\omega H / V_{max} = 3,03$  (pulsation de l'instabilité hydrodynamique déterminée dans la section précédente). Les modes plans se propageant vers l'aval et vers l'amont ont pour longueur d'onde  $\lambda^+ = 8,37H$  et  $\lambda^- = 5,62H$  respectivement. Les longueurs d'onde mesurées sur  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; 0)$  étant proches des ces valeurs, il est bien montré que l'instabilité rayonne un mode acoustique plan en aval du liner, ainsi qu'un mode plan en amont d'amplitude bien moins élevée, l'écart étant de 110 dB. Ce rayonnement acoustique est à mettre en parallèle avec le coefficient de transmission élevé observé expérimentalement par Aurégan et Leroux [6].

➤ Remarque : Les figures 8.17(a)(b) permettent d'apprécier l'amortissement des ondes acoustiques entrant dans les domaines PML.

## 8.4 Étude avec liner réaliste

La section 8.3 a permis de mettre en lumière un phénomène de croissance transitoire lié à la présence d'une condition d'impédance simplifiée :  $Z(\omega) = R$ . Paradoxalement, cette condition d'impédance devrait a priori être absorbante d'un point de vue acoustique ( $\Re(Z) > 0$ ) et l'instabilité hydrodynamique qui s'y développe est pourtant à l'origine d'une génération de bruit.

Nous nous intéressons à présent à une étude similaire où l'impédance du liner a une évolution fréquentielle proche de celle mesurée par Aurégan et Leroux [6], toujours en présence d'un écoulement de Poiseuille<sup>1</sup>. D'un point de vue numérique, l'imposition de la condition d'impédance est faite par la méthode présentée au chapitre 7 avec les paramètres déterminés en section 7.4.1. Afin de limiter dans un premier temps le nombre de degrés de liberté du calcul, nous imposons comme taille des éléments unidimensionnels  $h/10$ . En raisonnant de façon approchée à partir de l'équation (7.9), cette discrétisation permet de considérer comme étant calculés avec une précision de  $10^{-3}$  les phénomènes de pulsations inférieures à  $20\pi a_0/h(10^{-3}/3,32)^{1/5,31} = 10,0V_{max}/H$ . De plus, ces éléments unidimensionnels sont compris dans le domaine  $\Omega_0$  sur lequel l'énergie est maximisée.

Contrairement à l'étude précédente menée sur un liner de résistance constante  $Z(\omega) = R = 0,01$ , le liner choisi dans cette section ne fait pas apparaître de modes hydrodynamiques instables (avec un écoulement de Poiseuille). En effet pour un grand nombre de pulsations inférieures à  $2V_{max}/H$  testées, le spectre hydrodynamique se limite à une branche continue.

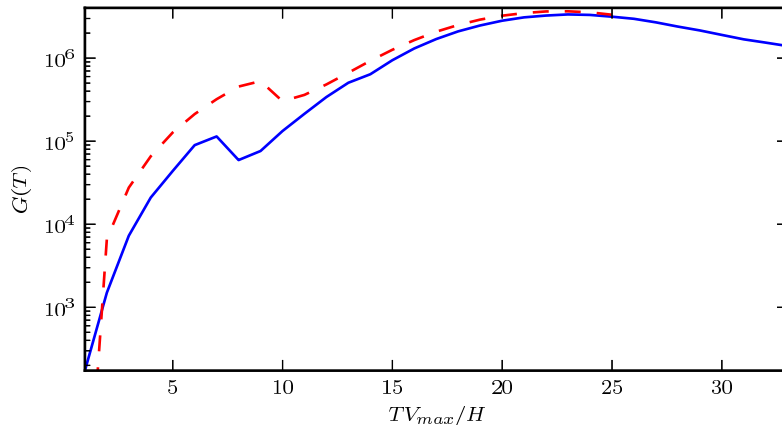


FIGURE 8.18 – Gain  $G(T)$ , la courbe bleue correspond à la fonction coût eq. (8.2) (où les cavités appartiennent à  $\Omega_0$ ) et la courbe rouge pointillée à la fonction coût eq. (8.4) (voir section 8.4.3).

### 8.4.1 Gain et perturbation initiale optimale

Le pas temporel du schéma Crank-Nicolson est  $10,2 \times 10^{-3}H/V_{max}$ . Le gain  $G(T)$  calculé est visible figure 8.18. Par rapport aux courbes de gain obtenues dans la section précédente, il est observé dans le cas présent l'existence d'un premier maximum local en  $TV_{max}/H \approx 7$  suivi d'une seconde phase d'amplification menant à un second maximum en  $TV_{max}/H \approx 23$ .

Pour  $TV_{max}/H \leq 7$ , les perturbations initiales optimales ont qualitativement la même forme pour tout  $T$ . À titre d'exemple nous traçons les perturbations initiales optimales pour  $TV_{max}/H \in \{1; 4; 7\}$  figure 8.19 (colonne de gauche). Sur la colonne de droite sont visibles les champs de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenus en propageant ces perturbations initiales optimales jusqu'à  $t = T$ . La perturbation initiale optimale ressemble à un paquet d'onde allongé et incliné vers l'amont situé au voisinage de la rupture d'impédance aval. Lors de sa propagation ce paquet d'onde se redresse.

Pour  $TV_{max}/H \in [7; 23]$ , les perturbations initiales optimales correspondent à des paquets d'onde inclinés vers l'amont localisés au voisinage du liner et de la paroi opposée et de longueur d'onde  $\lambda \approx 2H$ . À titre d'exemple, les champs de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  des perturbations initiales optimales obtenues pour  $TV_{max}/H \in \{9; 16; 23\}$

1. Cet écoulement a été préféré à un écoulement cisailé représentatif du cas expérimental car il ne requiert pas l'utilisation d'un maillage fortement raffiné à la paroi et permet donc l'obtention de temps de calcul plus modéré.

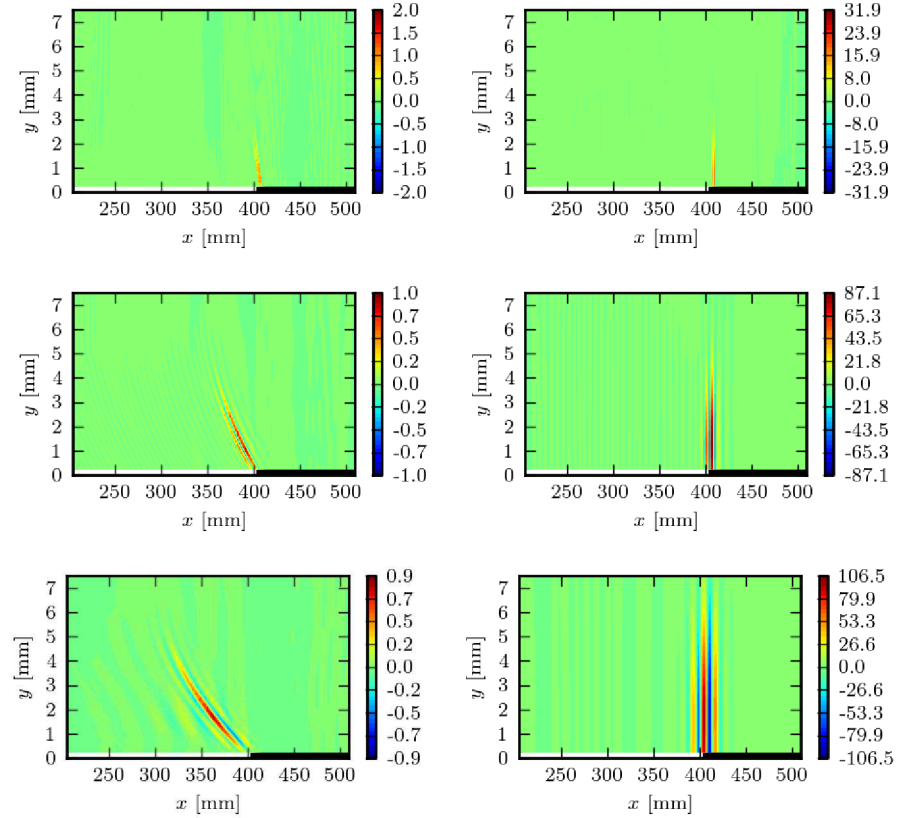


FIGURE 8.19 – Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour  $TV_{max}/H = 1$  (première ligne),  $TV_{max}/H = 4$  (deuxième ligne) et  $TV_{max}/H = 7$  (troisième ligne). Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre  $t = 0$  et  $t = T$  (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir.

sont tracées figure 8.20 (colonne de gauche) ainsi que leur propagation jusqu'à  $t = T$  (colonne de droite). Lors de leur propagation, les paquets d'onde se redressent et s'étirent verticalement tout en gardant la même longueur d'onde  $\lambda \approx 2H$ . Ce mécanisme d'amplification s'apparente à un mécanisme dit de Orr [32].

Sur les figures 8.21(a)(b)(c) sont représentées les évolutions de  $u(x; 0)$ ,  $v(x; 0)$  et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; 0)$  du champ d'énergie maximale à  $TV_{max}/H = 23$ . Par rapport aux évolutions représentées figures 8.13, un caractère singulier est aussi observé à la rupture d'impédance aval mais une forte amplification n'est pas observée. À l'aval du liner, seul sur la variable  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  est observé ce qui semble être une oscillation de plus grande longueur d'onde.

À partir de l'évolution de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  sur le liner, supposée être de la forme  $\cos(\Re(k)x) \exp(-\Im(k)x)$ , une transformée de Fourier rapide et une analyse de l'amplitude des pics donnent  $kH = 3,77 - 0,64i$ .

#### 8.4.2 Analyse temporelle et fréquentielle

Comme en section 8.3.4.2, l'évolution temporelle de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  est mesurée par les trois capteurs représentés figure 8.1. La période d'échantillonnage est  $61,2 \times 10^{-3} H/V_{max}$  (valeur six fois plus élevée que le pas de temps du calcul). Les signaux mesurés par ces trois capteurs sont tracés figures 8.22(a)(b)(c). Il est remarquable que, contrairement aux résultats tracés précédemment figures 8.15(a)(b)(c), les signaux mesurés par les capteurs ne traduisent pas l'amplification du paquet d'onde lors de sa propagation sur l'ensemble du liner. Seule une amplification entre le capteur en  $x_L$  et celui en  $x_L + L/4$  est observée.

Une transformée de Fourier rapide du signal mesuré en  $x_L + L/4$  (voir figure 8.23) montre que la pulsation

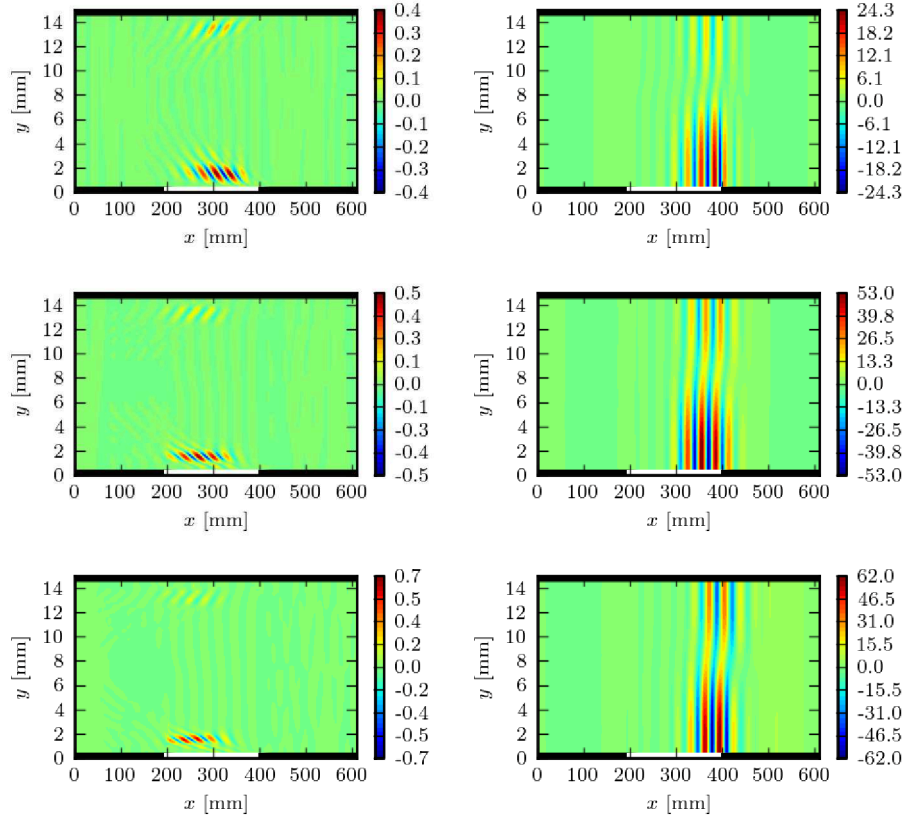


FIGURE 8.20 – Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour  $TV_{max}/H = 9$  (première ligne),  $TV_{max}/H = 16$  (deuxième ligne) et  $TV_{max}/H = 23$  (troisième ligne). Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre  $t = 0$  et  $t = T$  (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir.

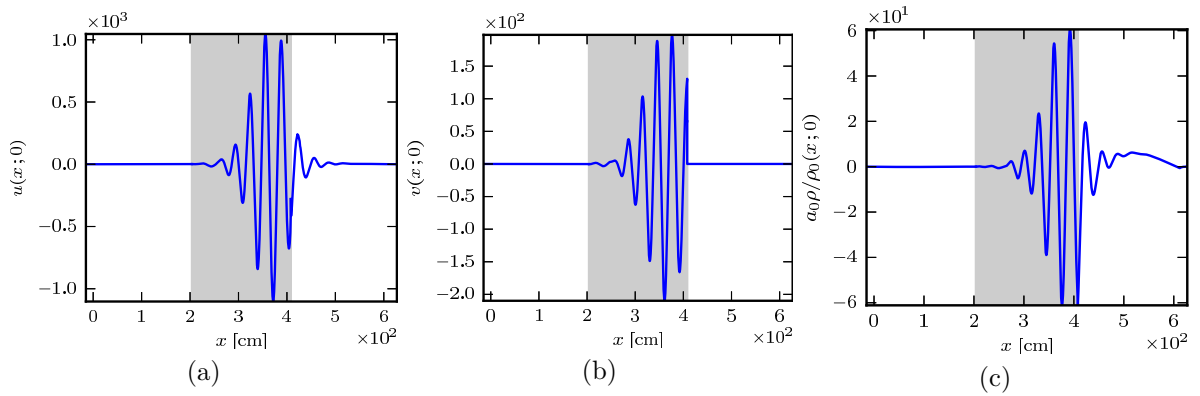


FIGURE 8.21 – Évolutions de  $u(a)$ ,  $v(b)$  et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(c)$  sur la paroi inférieure du champ d'énergie maximale à  $TV_{max}/H = 23$ . La zone grisée correspond à la position du liner.

du signal est  $1,09V_{max}/H$ , valeur proche de la fréquence de résonance du liner ( $\omega = 1,15V_{max}/H$ , voir section 7.4.1).

À l'aide du solveur Galerkin discontinu unidimensionnel (voir annexe C), une analyse de stabilité locale est effectuée à cette fréquence avec pour objectif de définir si l'instabilité de nombre d'onde

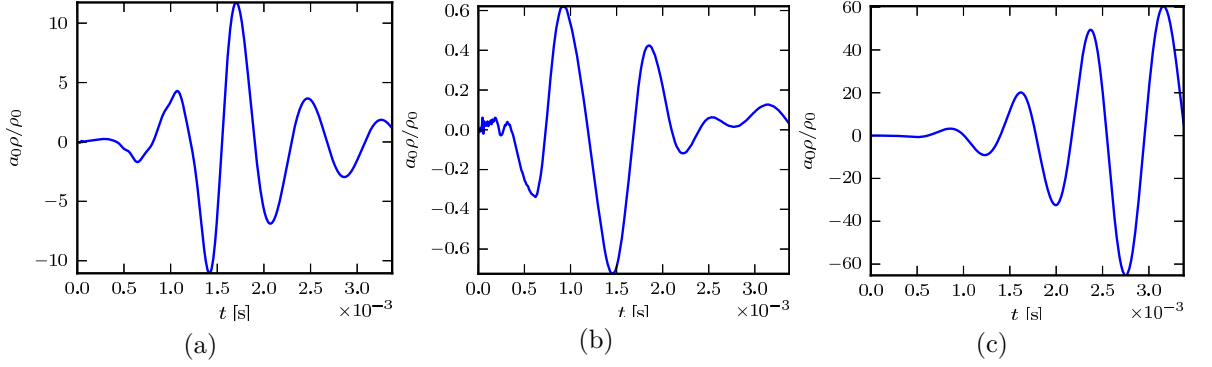


FIGURE 8.22 – Mesures de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  par les capteurs situés en  $x_L - L/4$ (a),  $x_L$ (b) et  $x_L + L/4$ (c).

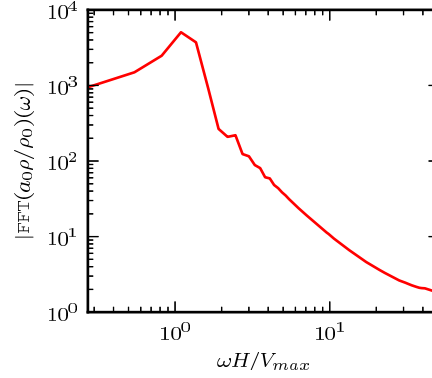


FIGURE 8.23 – Transformées de Fourier rapides des signaux temporels de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  mesurés sur le capteur en  $x_L + L/4$ .

$kH = 3,77 - 0,64i$  (trouvé précédemment) peut être captée. Le solveur modal Galerkin discontinu permet de calculer avec précision un nombre fini de modes de la branche continue bien que ces modes soient singuliers (voir section C.3). La maillage unidimensionnel est défini de façon à avoir un point de contrôle en  $y_c$  tel que  $\omega - U_0(y_c)\Re(k = (3,77 - 0,64i)H) = 0$ . Malgré cela, le spectre n'exhibe que des modes hydrodynamiques liés à la branche continue.

Pour cette fréquence, les modes plans acoustiques se propageant vers l'aval et vers l'amont ont pour longueurs d'onde  $\lambda^+ = 25,0H$  et  $\lambda^- = 13,5H$  respectivement pour un écoulement uniforme de même nombre de Mach moyen. À titre de perspectives, il serait ainsi intéressant à l'avenir d'effectuer ces mêmes calculs de croissances transitoires sur un maillage où les portions rigides amont et aval sont de bien plus grandes tailles, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$ . Cela permettrait de s'intéresser à un éventuel rayonnement acoustique par une instabilité hydrodynamique se développant sur un liner bien qu'en considérant ce dernier infini, l'analyse de stabilité locale ne permette pas de capter de mode hydrodynamique convectivement instable.

### 8.4.3 Autre fonction coût

L'étude présentée ci-dessus est effectuée en maximisant la fonction coût correspondant à l'énergie dans le conduit et dans les cavités. Afin de déterminer si cela a un impact significatif sur les résultats, nous effectuons une série de calculs avec la fonction coût définie par eq. (8.4),  $f$  étant définie par eq. (8.5) dans le conduit et étant nulle dans les cavités.

Sur la figure 8.18 est tracée en pointillés rouges la courbe de gain ainsi obtenue. Qualitativement, un comportement similaire est trouvé : un premier maximum local est observé pour  $TV_{max}/H \approx 9$  (contre 7 précédemment) puis une seconde phase d'amplification mène à un maximum global de même position et

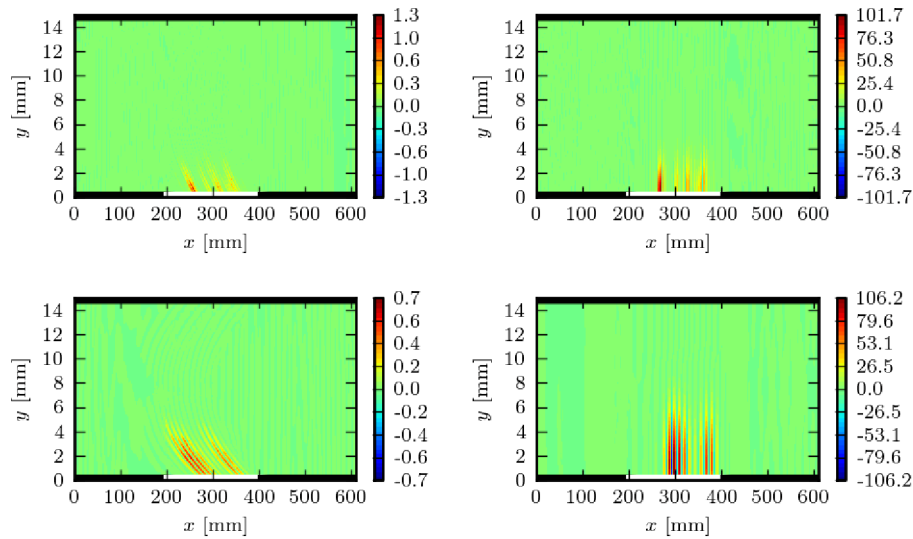


FIGURE 8.24 – Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour  $TV_{max}/H = 4$  (première ligne) et  $TV_{max}/H = 7$  (deuxième ligne). Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre  $t = 0$  et  $t = T$  (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir.

de valeur proche de celle obtenue avec  $\mathcal{J} = \langle \varphi; \varphi \rangle_{\Omega_0}$ . Comme précédemment, nous observons qu'avant le maximum local, les perturbations initiales optimales sont des paquets d'onde allongés et inclinés de faibles longueurs d'onde se redressant lors de leurs propagations. À titre d'exemples, les perturbations initiales optimales pour  $TV_{max}/H \in \{4; 7\}$  sont tracées figure 8.24 (colonne de gauche). Sur cette même figure sont aussi données les champs de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenus en propageant ces perturbations initiales jusqu'à  $t = T$  (colonne de droite). Contrairement aux champs tracés figure 8.19, les paquets ne sont pas situés sur la partie aval du liner mais sont répartis sur celui-ci.

Pour une valeur de  $T$  comprise entre les deux maxima, nous observons comme précédemment (voir figure 8.20) des paquets d'onde inclinés vers l'amont de longueurs d'onde  $\lambda \approx 2H$  localisés au voisinage du liner et de la paroi rigide opposée, voir figure 8.25. À nouveau, les paquets d'onde s'amplifient lors de leurs convections par l'écoulement qui les redresse, tout en gardant la même longueur d'onde  $\lambda \approx 2H$ .

#### 8.4.4 Amplification due à l'écoulement de Poiseuille seul

Les deux sources de non-normalité à l'origine du phénomène de croissance transitoire observé étant la condition aux limites d'impédance et le cisaillement de l'écoulement porteur, il convient d'évaluer l'apport de chacune de ces sources. Pour cela, l'analyse de stabilité non modale est effectuée en remplaçant le liner par une paroi rigide.

## 8.5 Étude modale

### 8.5.1 Présentation du cas d'étude

Contrairement aux études menées précédemment dans ce chapitre, l'étude développée dans cette section vise à caractériser une dynamique de type résonateur. Pour cela, nous nous intéressons aux calculs de stabilité locale effectués par Marx et Aurégan [96] sur un écoulement porteur représentatif d'un écoulement turbulent dans un conduit traité acoustiquement modélisant les expériences menées par Marx et collab. [95] (voir section 2.3.5.3). Marx et Aurégan [96] ayant montré que les équations d'Euler linéarisées admettent pour cet écoulement porteur une instabilité absolue, il serait intéressant de comparer celle-ci aux modes issus d'une analyse de stabilité globale sur ce cas d'étude.



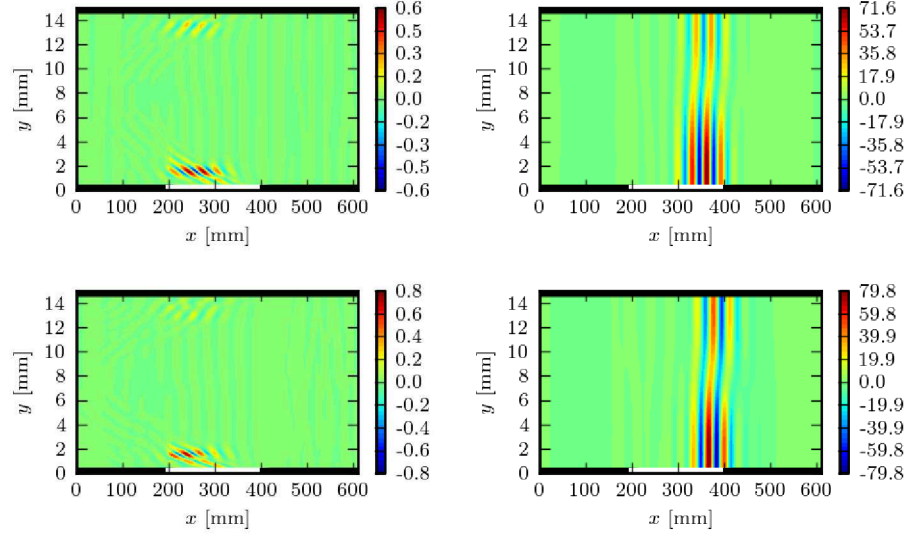


FIGURE 8.25 – Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  des perturbations initiales optimales (colonne de gauche) pour  $TV_{max}/H = 16$  (première ligne) et  $TV_{max}/H = 23$  (deuxième ligne). Champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  obtenu par propagation de ces perturbations initiales optimales entre  $t = 0$  et  $t = T$  (colonne de droite). Seule la région de l'espace où le champ est non nul est représentée, le liner est représenté en blanc et la paroi rigide en noir.

Le profil de vitesse de l'écoulement porteur est déterminé à partir des équations eqs. (2.28) (2.29). L'intégration numérique de eq. (2.28) est effectuée par collocation par des polynômes de Chebyshev. Afin de déterminer le nombre  $N_c$  de polynômes nécessaires pour calculer précisément cet écoulement, le calcul de l'écoulement a été effectué pour  $N_c = \{41; 81; 121; \dots\}$ . Le calcul a été considéré comme convergé lorsque le résidu  $|\max(U_0^{i+1}) - \max(U_0^i)| / |\max(U_0^i)| \approx 10^{-4}$  où  $\max(U_0^i)$  est le maximum du profil de vitesse calculé avec  $(N_c)^i$  polynômes.  $N_c = 201$  permet de satisfaire cette condition (l'utilisation d'une transformation ou d'une méthode multi-domaines aurait sûrement permis d'obtenir la convergence avec moins de polynômes).

L'écoulement obtenu par intégration numérique est tracé figure 8.26(a), le gradient (eq. (2.28)) est tracé figure 8.26(b). Le zoom sur  $M'_0(y)$  à la paroi permet d'observer la sous-couche visqueuse jusqu'à  $y^+ \approx 2,76$  (soit  $1 - y/H \approx 5 \times 10^{-4}$ ). La maillage utilisé pour les calculs devra ainsi impérativement être raffiné aux parois pour s'assurer que l'écoulement porteur et son gradient soient bien pris en compte.

Le Mach moyen est  $\bar{M} = 0,27$  et le conduit a pour hauteur  $H = 2$  cm. L'impédance imposée par Marx et Aurégan [96] suit la loi :

$$Z_{MA}(\omega) = i\phi \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} + i \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

avec  $\phi = 1,25$ ,  $h = 4,25$  cm et  $\varepsilon = 0,3$ . Pour ces paramètres, Marx et collab. trouvent une instabilité absolue de taux d'amplification  $\Im(\omega^{MA}H/a_0) = 0,214$  dont la fréquence n'est pas donnée. Dans le plan complexe des nombres d'onde  $k_x$ , le point de pincement est trouvé pour  $k_x^{MA}H \approx 9,6 - 26i$ , la longueur d'onde est donc :  $\lambda^{MA} \approx 0,65H$ .

Comme en section 7.4.1, nous cherchons les valeurs des paramètres  $h$ ,  $R$  et  $\varepsilon$  de la loi d'impédance

$$Z(\omega) = R + i \cotan \left( \frac{\omega h}{a_0} + i \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

permettant de reproduire au mieux la loi d'impédance imposée par [96]. À nouveau, nous cherchons à minimiser l'erreur au sens des moindres carrés pour  $\omega \in 2\pi[70; 3000]$  Hz. La librairie Python `lmfit` donne les paramètres  $R = 0,07$ ,  $h = 4,25H$ ,  $\varepsilon = 0,244$ . Sur les figures 8.27(a)(b) sont comparées les résistances et réactances entre les deux modèles, l'erreur quadratique est représentée figure 8.27(c).



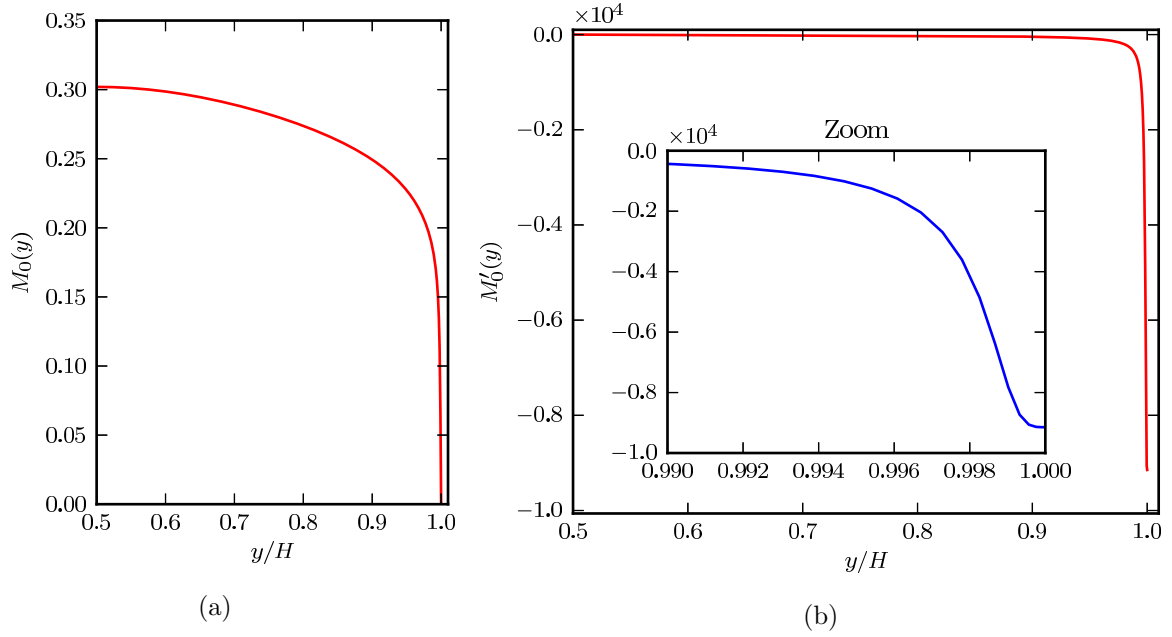


FIGURE 8.26 – Écoulement turbulent obtenu par intégration numérique de eq. (2.28) (a). Gradient du profil de vitesse (eq. (2.28))  $M'_0(y)$  (b).

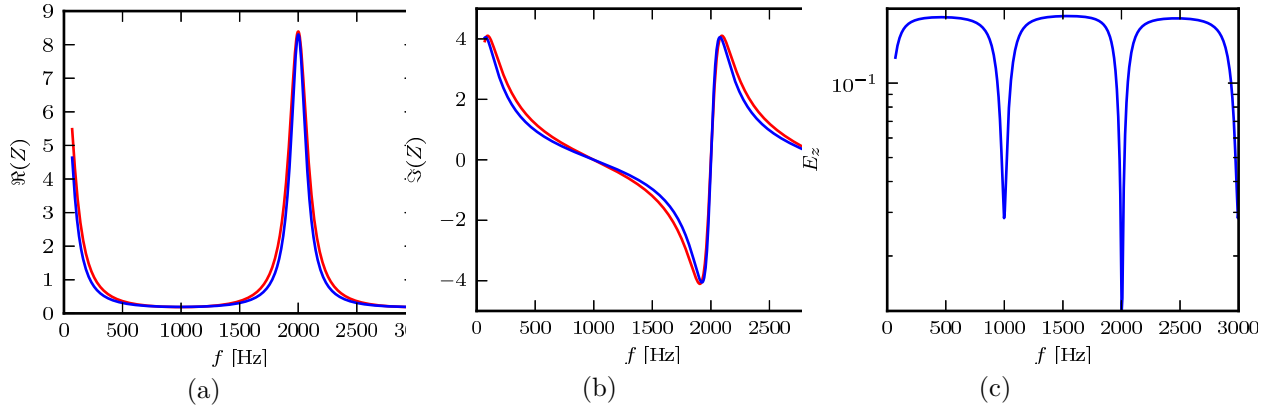


FIGURE 8.27 – Résistance (a) et réactance (b) de la loi d'impédance imposée par Marx et Aurégan [96] (en rouge) et de celle imposée dans EMILE (en bleu). Erreur quadratique entre les deux modèles  $E_Z = |Z - Z_{MA}|^2 / |Z_{MA}|^2$  (c).

## 8.5.2 Calcul de stabilité globale

### 8.5.2.1 Paramètres de calcul

Le calcul de stabilité globale est fait sur une configuration de géométrie comme représentée figure 8.1. Le liner a pour longueur  $L \approx 0,9H$  (dans [95]  $L = 3,75H$ ) et les portions rigides en amont et aval ont pour dimension :  $(x_0 - l)/2 \approx 0,9H$ . Les mêmes paramètres des couches PML sont utilisés :  $\sigma_0 H / a_0 = 20$ ,  $\beta = 1$  et  $d = H$ . Il aurait été préférable d'effectuer les calculs sur un liner de taille plus élevée ( $0,9H$  correspond à environ une longueur d'onde et demi de l'instabilité absolue) mais cela n'a pas été possible à cause de limitations numériques.

Le maillage est obtenu par raccord de neuf sous domaines représentés figure 8.28. Afin de capter au mieux la couche limite turbulente, les domaines supérieurs (1 à 3) et les domaines inférieurs (7 à 9), de hauteur  $H/20$ , sont maillés suivant une loi géométrique en  $y$ . Les domaines hors de la zone visqueuse (4 à 6) sont maillés uniformément, la continuité du pas de maillage étant imposée aux raccords entre domaines. Le pas de maillage à la paroi est de  $\Delta h = 6,6 \times 10^{-4}H$ , cette faible valeur permet d'approcher avec précision

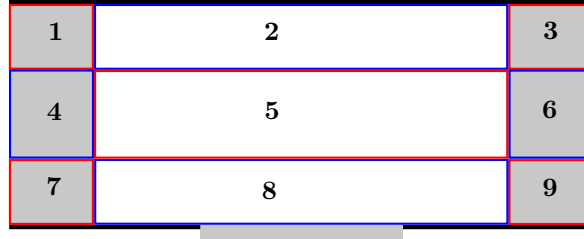


FIGURE 8.28 – Décomposition du domaine de calcul en sous domaines. Les zones grisées en amont et aval correspondent aux couches PML.

la dérivée en  $y$  de la vitesse axiale. La progression géométrie de raison 1,8 donne un pas de maillage  $\Delta h = 2,2 \times 10^{-2}H$  dans la zone uniformément maillée. L'écoulement porteur imposant l'utilisation d'un maillage fin aux parois, un raffinement supplémentaire n'a pas été appliqué au voisinage du liner.

### 8.5.2.2 Résultats

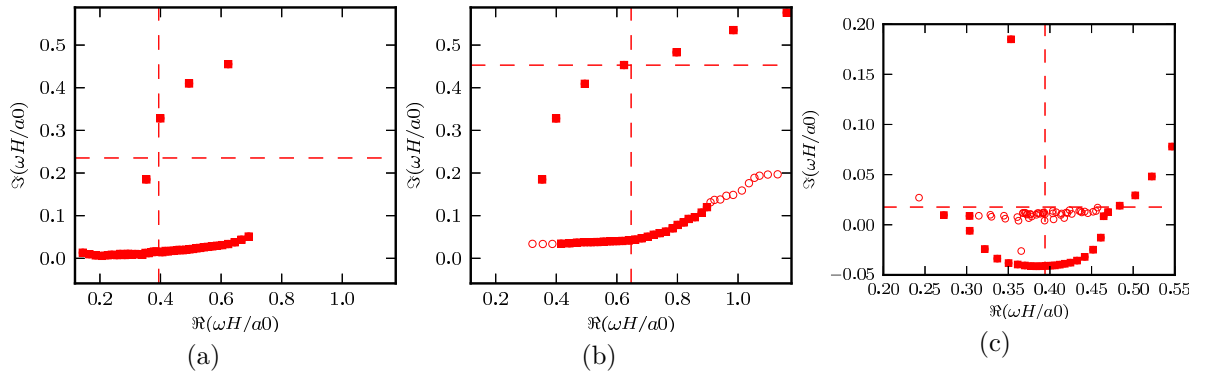


FIGURE 8.29 – Valeurs propres obtenues pour les cibles  $\sigma H/a_0 = 0,39 + 0,24i$  (a),  $\sigma H/a_0 = 0,64 + 0,45i$  (b) et  $\sigma H/a_0 = 0,39 + 0,02i$  (c), les positions des cibles sont représentées par les lignes pointillées. Les cercles correspondent aux valeurs propres obtenues par EMILE et les carrés pleins sont les valeurs propres retenues par le critère de Shi et collab..

Un premier calcul est effectué avec une cible choisie de partie imaginaire proche du taux d'amplification de l'instabilité absolue :  $\Im(\omega H/a_0) = 0,24$ . La partie réelle est choisie égale à la fréquence d'excitation donnée par Marx et Aurégan [96] :  $\Re(\omega H/a_0) = \omega_a H/a_0 = 0,39$ . Le spectre obtenu est représenté figure 8.29(a), celui-ci est composé de quatre modes isolés et d'un ensemble de valeurs propres faiblement instables formant un arc. Selon le critère de Shi et collab. [142] (eq. (6.22)), tous les modes obtenus sont physiques.

Nous nous intéressons dans un premier temps aux modes isolés. Le mode de valeur propre  $\omega H/a_0 = 0,35 + 0,18i$  a le taux d'amplification le plus proche de la valeur trouvée par Marx et Aurégan [96] et semble bien de nature physique étant donné que le critère de Shi et collab. le définit comme tel à l'issu d'un calcul effectué avec une cible proche.

Concernant les autres modes isolés, nous portons à titre d'exemple notre attention sur le mode de valeur propre  $\omega H/a_0 = 0,62 + 0,46i$ . Pour cela un calcul est mené avec une cible proche  $\sigma H/a_0 = 0,64 + 0,45i$ , voir figure 8.29(b). L'application du critère de Shi et collab. ne caractérise pas ce mode comme de Bérenger ou parasite. Ce mode est ainsi physique et nous sommes amenés à penser qu'il en est de même pour les deux autres modes isolés visibles figure 8.29(a).

Dans un deuxième temps, la nature des modes formant un arc figure 8.29(a) est étudiée. Pour cela, un troisième calcul est réalisé avec pour cible  $\sigma H/a_0 = 0,39 + 0,02i$ , le spectre obtenu est représenté figure 8.29(c). Le critère de Shi et collab. indique que cette branche de modes est de nature non physique.

### 8.5.2.3 Étude des modes physiques

**Mode de valeur propre  $\omega H/a_0 = 0,35 + 0,18i$**

L'écart relatif entre le taux d'amplification de l'instabilité absolue donnée par Marx et Aurégan [96]  $\Im(\omega^{MA})H/a_0 = 0,214$  et celui trouvé par EMILE  $\Im(\omega^g)H/a_0 = 0,18$  est :

$$\frac{2 |\Im(\omega^{MA}) - \Im(\omega^g)|}{|\Im(\omega^{MA})| + |\Im(\omega^g)|} = 17\% .$$

Une première source d'erreur peut provenir du modèle d'impédance. En effet pour  $\omega = \Re(\omega^g) = 0,35a_0/H$ , l'impédance obtenue avec la loi imposée par Marx et Aurégan [96] est  $0,19 + 0,10i$  contre  $0,19 + 0,08i$  avec la loi imposée dans EMILE, ce qui correspond à un écart relatif de 9,4%. La deuxième principale source d'erreur vient probablement de la taille trop faible du liner. En effet celle-ci correspond à environ trois fois la longueur d'onde de l'instabilité absolue trouvée par Marx et Aurégan [96]  $\lambda^{MA}$  ce qui n'est probablement pas suffisant pour retrouver un comportement unidimensionnel. À titre de perspectives, il serait intéressant de pouvoir effectuer un calcul avec  $L = 4\lambda_{MA}$  (comme en section 8.3.4).

Le champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  du mode de valeur propre  $\omega^g$  est tracé figure 8.30(a). Celui-ci n'existe qu'au voisinage

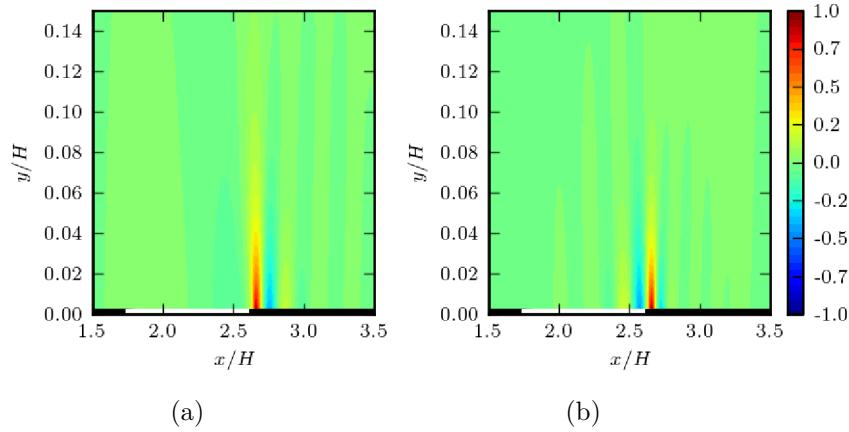


FIGURE 8.30 – Champs de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  des modes associés aux valeurs propres  $\omega H/a_0 = 0,35 + 0,18i$  (a) et  $\omega H/a_0 = 0,62 + 0,46i$  (b). Les parois rigides sont représentées par des traits épais noirs et le liner par un trait épais blanc.

du liner et ainsi seule une portion de l'espace est représentée figure 8.30(a). L'absence de rayonnement acoustique dans le conduit s'explique par le fait que les modes acoustiques se propageant en amont et aval sont amortis spatialement car  $\Im(\omega^g) > 0$ . En effet si l'on s'intéresse par exemple au mode acoustique plan se propageant en aval, son nombre d'onde peut être approché par  $k = \omega/(a_0(\bar{M} + 1))$ .

Nous nous intéressons en particulier au comportement du mode sur la paroi inférieure (en  $y = 0$ ), les fonctions  $u(x; 0)$ ,  $v(x; 0)$  et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x; 0)$  sont respectivement tracées figures 8.31(a),(b) et (c). Nous observons un comportement singulier au niveau de la rupture d'impédance aval. Comme au chapitre 5, un pic de haute amplitude est observée sur la vitesse tangentielle à la paroi ( $u$ ). En revanche, nous observons sur la vitesse normale à la paroi ( $v$ ) et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  une forte amplification au voisinage de la rupture. Comme pour les calculs effectués en section 8.3.4, il serait intéressant d'appliquer la condition d'orthogonalité développée en section 5.2 à la discontinuité d'impédance aval.

### Et les autres modes ?

Par rapport aux résultats publiés par Marx et Aurégan [96], il est intéressant de noter la présence de plusieurs modes responsables d'une dynamique de type résonateur. Une des explications peut provenir de la situation étudiée qui n'est pas équivalente à celle étudiée par Marx et Aurégan et peut ainsi présenter une dynamique propre liée par exemple à l'existence de discontinuités d'impédance. D'après la figure [96,

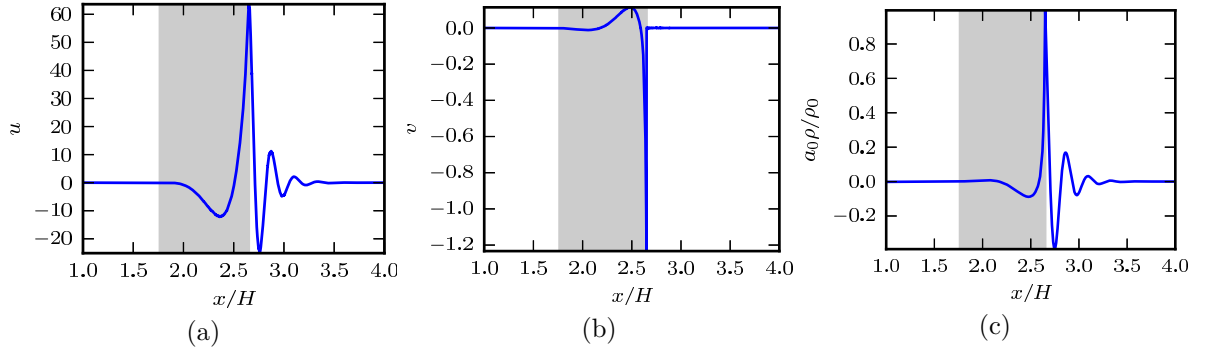


FIGURE 8.31 – Évolutions de  $u$  (a),  $v$  (b) et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  (c) sur la paroi inférieure du mode de valeur propre  $\omega H/a_0 = 0,35 + 0,18i$ . La zone grisée correspond à la position du liner.

fig.11], Marx et Aurégan sont partis d'une branche  $L_\omega$  (voir [96, section 4.2]) de partie imaginaire égale à  $0,82a_0/H$ , valeur supérieure à l'ensemble des taux d'amplifications des modes instables calculés. À moins que Marx et Aurégan aient choisi un contour  $L_\omega$  avec une partie réelle trop peu étendue, ce qui paraît peu probable étant donné qu'un des modes instables a pour fréquence  $\Re(\omega)H/a_0 = 0,40$  (valeur proche de  $\Re(\omega^g)$ ), le fait qu'ils n'ont pas trouvé d'autres instabilités absolues montre que les autres modes instables obtenus avec EMILE ne sont pas liés à l'existence d'une région absolument instable dans la configuration liner infini.

Les fonctions propres de ces autres modes sont qualitativement très proches de celle pour le mode de valeur propre  $\omega^g$ , à titre d'exemple est tracé le champ de  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  pour le mode de valeur propre  $\omega H/a_0 = 0,62 + 0,46i$  figure 8.30(b).

Nous traçons de plus les fonctions  $u(x;0)$ ,  $v(x;0)$  et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x;0)$  sur la figure 8.32. Par rapport aux

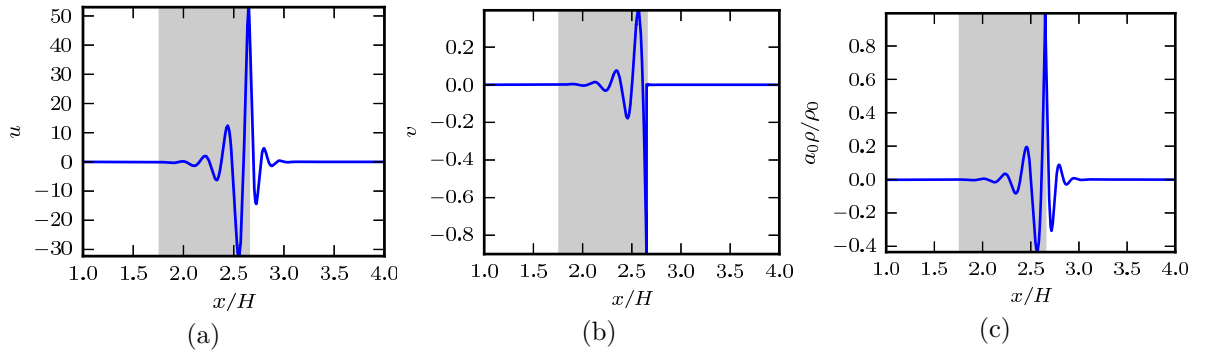


FIGURE 8.32 – Évolutions de  $u$  (a),  $v$  (b) et  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  (c) sur la paroi inférieure du mode de valeur propre  $\omega H/a_0 = 0,62 + 0,46i$ . La zone grisée correspond à la position du liner.

courbes représentées figure 8.31(a)(b)(c), nous observons des phénomènes qualitativement comparables de longueur d'onde plus courte, ce qui est cohérent avec la fréquence plus élevée du mode.

## 9.1 Conclusion

Les travaux conduits au cours de cette thèse ont porté sur le développement du code EMILE basé sur une version préliminaire d'un solveur aéroacoustique existant discrétisé en formulation Galerkin discontinue. Le code EMILE a été développé avec pour objectifs de pouvoir réaliser aussi bien des analyses modales acoustiques que des études de stabilité linéaire dans un conduit traité acoustiquement, les calculs pouvant être effectués soit dans une section transverse du conduit, soit dans une section longitudinale. L'analyse de stabilité linéaire peut être effectuée par une approche modale ou non modale, dans ce cas est menée une recherche de la perturbation initiale optimale. En plus de mettre en avant de nombreux avantages de la méthode Galerkin discontinue, l'application du code a permis d'apporter des informations sur l'acoustique du banc B2A et de nacelles avec splices et sur les instabilités hydrodynamiques pouvant se développer sur un liner.

La première étape de développement du code a consisté à ajouter à la résolution dans le plan longitudinal d'un conduit, la possibilité de traiter des configurations transverses. Pour ces deux types de géométrie, la précision de la discrétisation a été améliorée en passant de polynômes d'ordre un à des polynômes d'ordre deux. Ce travail nous a permis d'identifier les modifications à effectuer pour élever l'ordre de discrétisation et sera utile à l'avenir pour des travaux visant à augmenter encore l'ordre de discrétisation, à implanter l'adaptabilité  $p$  ou encore à étendre le code à la résolution tridimensionnelle (voir les perspectives ci-dessous). La résolution du problème aux valeurs propres inhérent à l'analyse modale est effectuée par la méthode de Krylov-Schur associée à la transformation shift-invert, à l'aide de la librairie SLEPc [67]. Cette méthode, permettant la détermination de quelques dizaines de modes autour d'une cible, implique la résolution d'un système linéaire que nous avons choisi d'effectuer à l'aide du solveur MUMPS. Les performances de la méthode ont été évaluées en terme de précision et de vitesse d'exécution, en calcul séquentiel. Mais la résolution est aussi possible en calcul parallèle (par MPI).

L'application du code a porté dans un premier temps à l'étude des modes acoustiques par une analyse modale dans la section transverse d'un conduit. Le code a été validé à partir de solutions analytiques existant pour un conduit à section circulaire uniformément revêtu d'un matériau absorbant et en absence d'écoulement. À partir de résultats issus de la littérature, d'autres validations ont été effectuées avec et sans écoulement sur des géométries présentant des discontinuités d'impédances. Une fois validé, le code a été appliqué à l'étude des modes acoustiques se propageant dans un conduit uniformément liné excepté dans de petites régions appelés «splices», situation représentative de l'entrée d'air d'un turbofan où pour des raisons de réalisation il n'est pas possible au motoriste de recouvrir intégralement la nacelle d'un matériau absorbant. En plus d'étudier l'effet de ces splices, nous avons montré le comportement robuste de la méthode au voisinage des ruptures d'impédance et il a été possible de mettre en lumière le comportement des différentes composantes de la perturbation acoustique au niveau de ces discontinuités. Il a été observé que la pression, seule variable utilisée dans la grande majorité des études précédentes (via

l'équation de Pridmore-Brown), bien qu'étant bien plus régulière que les composantes de vitesse acoustique tangentielle et normale à la paroi, présente une dérivée infinie par rapport à la direction tangentielle à la paroi. Ce comportement est lié au caractère infini de la composante de vitesse tangentielle à la paroi. Enfin, il a été observé que la vitesse normale à la paroi est discontinue, comme attendu.

Le code a ensuite été appliqué à l'étude des modes acoustiques dans la section transversale du banc B2A afin d'évaluer l'effet de la taille réduite du traitement acoustique sur l'application de méthodes inverses visant à déterminer l'impédance du liner à partir de mesures. Il a été observé qu'en absence comme en présence d'un écoulement porteur, la géométrie actuelle du banc B2A implique la prise en compte des effets tridimensionnels pour pouvoir estimer précisément l'impédance du liner.

Un autre axe majeur d'étude concerne l'étude de stabilité non modale par recherche de la perturbation initiale optimale, effectuée en domaine temporel, et l'analyse modale dans la section longitudinal d'un conduit traité acoustiquement. Le domaine de calcul modélisant cette configuration physiquement non bornée est tronqué grâce à l'utilisation de couches PML dont l'utilisation est validée en domaine temporel et en analyse modale. Concernant cette dernière, l'effet de la position de la cible de la transformation shift-invert a été montré ainsi que le bon fonctionnement en général du critère de Shi et collab. [142], développé dans le cadre de l'électromagnétisme, pour distinguer les modes physiques des modes de Bérenger ou parasites. Étant nécessaires au calcul de la perturbation initiale optimale, nous nous sommes intéressés à l'étude et l'implantation des équations adjointes. Les travaux de Ventribout [153] démontrant l'équivalence entre l'adjoint du discrétisé et la discrétisation des équations adjointes continues ont notamment été étendus en présence de PML. Ce point représente un avantage majeur de la méthode Galerkin discontinue par rapport à d'autres méthodes de discrétisation car il permet d'éviter la résolution d'un problème mal posé et la création de modes non physiques. Ces travaux ont permis de s'intéresser à l'étude de croissance transitoires se développant dans un conduit traité acoustiquement par un matériau d'impédance réelle constante de faible valeur et parcouru par un écoulement de Poiseuille. Une étude de stabilité locale effectuée en considérant ce liner infini a montré l'existence d'un mode hydrodynamique convectivement instable. Ce cas d'étude, bien que faisant intervenir un liner d'impédance peu réaliste, a servi de validations grâce à une bonne cohérence entre d'un côté la dynamique de type amplificateur de bruit évaluée par la recherche de la perturbation initiale optimale et de l'autre l'instabilité hydrodynamique convective calculée par stabilité locale. De plus, il a été montré que ce mécanisme d'instabilité hydrodynamique était à l'origine de la génération d'un mode plan acoustique d'amplitude élevée se propageant en aval du conduit, résultat cohérent avec les mesures effectuées par Aurégan et Leroux [6]. En outre, cette instabilité rayonne un mode plan acoustique d'amplitude plus modérée se propageant vers l'amont du conduit.

La réalisation d'une telle étude avec un liner réaliste fait face au problème général de la modélisation en domaine temporel d'un liner, problème du à la définition en domaine fréquentielle de l'impédance. Parmi les méthodes existantes [146, 131, 106, 138] nous avons choisi la méthode de Sbardella et collab. [138] que nous avons étendue afin de la rendre applicable à la modélisation de liners réalistes. Cette méthode présente par rapport à celle de Rienstra [131], largement employée dans la littérature, l'avantage supplémentaire de simplifier l'analyse modale en présence de matériau absorbant grâce à l'écriture du problème aux valeurs propres associé sous forme linéaire bien que la loi d'impédance modélisée soit non linéaire vis-à-vis de la pulsation, cette dernière étant la valeur propre à déterminer.

L'implantation de ce modèle a permis de conduire une analyse des croissances transitoires dans un conduit parcouru par un écoulement de Poiseuille où est placé un liner de loi d'impédance approchant celle mesurée par Aurégan et Leroux [6]. Cette analyse a permis de mettre en lumière une dynamique instable de type amplificateur de bruit alors que la théorie de stabilité locale ne permet pas de déceler une quelconque instabilité hydrodynamique. Les calculs ont indiqué que les croissances transitoires observées sont liées à un mécanisme de Orr caractérisé par une fréquence proche de la fréquence de résonance du liner. Cette méthode de modélisation d'un liner étant bien adaptée pour l'étude modale temporelle, le code a été appliqué en présence d'un écoulement et d'un liner pour lesquels Marx et Aurégan [96] ont montré que les équations d'Euler linéarisées exhibent une instabilité absolue. Ces premiers calculs sur un liner de taille réduite ont montré l'existence d'instabilités temporelles. Une d'entre elles s'amplifie avec un taux proche de celui de l'instabilité absolue calculée par Marx et Aurégan. L'existence d'autres instabilités temporelles n'est pas encore claire et nécessitera à l'avenir un travail plus approfondi (voir les perspectives ci-dessous).

## 9.2 Perspectives

Les travaux menés au cours de cette thèse ont montré la capacité de la méthode Galerkin discontinue à traiter avec précision des problèmes d'analyse modale dans la section transversale de conduits de formes diverses en présence d'écoulement ou non. La méthode s'est notamment distinguée par sa robustesse au voisinage des discontinuités d'impédance où le caractère singulier de la perturbation acoustique a été montré. Il serait néanmoins intéressant d'aller plus loin en améliorant les performances de la méthode par une augmentation de l'ordre de discrétisation et l'implantation de l'adaptabilité  $p$ . À l'issue de ces développements, la conduite d'une étude comme celle publiée dans la référence [109] permettra de comparer avec objectivité les performances du schéma Galerkin discontinu avec la méthode de collocation spectrale par des polynômes de Chebyshev, cette dernière étant largement employée en analyse modale.

Ces améliorations des performances seront de plus bénéfiques à la poursuite des analyses de stabilité, modales et non modales, dans la section longitudinale d'un conduit traité acoustiquement et parcouru par un écoulement cisailé, les études sur cette configuration ayant approché les limites du code EMILE d'un point de vue des performances. Concernant la recherche de la perturbation initiale optimale, il serait judicieux de s'intéresser à l'utilisation de schémas temporels mieux adaptés comme par exemple le schéma LSERK à pas de temps local. Les calculs de croissances transitoires effectués ont permis l'obtention de résultats inédits apportant de nouvelles informations sur le développement d'instabilités sur des liners. Dans la configuration avec un liner représentatif de celui utilisé expérimentalement par Aurégan et Leroux [6] et un écoulement de Poiseuille, configuration définie par la théorie de stabilité locale comme stable, il serait intéressant d'évaluer si l'instabilité observée est à l'origine du rayonnement d'une onde acoustique. Enfin, l'analyse de stabilité non modale dans une configuration avec liner et écoulement réalistes pour lesquels une instabilité hydrodynamique convective est observée en stabilité locale [93, 16] permettrait d'apporter de nouvelles informations sur le développement d'une instabilité hydrodynamique sur un liner et la génération de bruit par celle-ci.

En imposant le modèle de liner et d'écoulement pour lesquels Marx et Aurégan [96] ont trouvé par analyse de stabilité locale une instabilité absolue, le code a montré l'existence de modes globaux temporairement instables. Certaines questions ont néanmoins été laissées en suspens et demanderont la réalisation de calculs supplémentaires, notamment sur des géométries avec des liners de taille plus grande.

Que ce soit en analyse non modale ou modale, l'étude dans la section longitudinale d'un conduit a fait apparaître un comportement fortement singulier à la rupture d'impédance aval. Ce comportement est pour le moment moins bien compris que celui observé lors des analyses modales menées dans la section transversale d'un conduit et nécessite la conduite d'études supplémentaires, comme par exemple la réalisation de calculs sur des maillages plus finement maillés au voisinage de la discontinuité. Il serait aussi intéressant de changer l'orientation des mailles à la discontinuité d'impédance pour voir si celle-ci a un effet sur les résultats qui ne serait pas simplement théorique comme c'est le cas lors de l'étude dans la section transversale d'un conduit. D'un point de vue plus physique, le rayonnement acoustique provoqué par l'instabilité hydrodynamique à la jonction liner-paroi rigide est un point à approfondir. De plus, il serait intéressant d'étudier comment est modifié ce comportement singulier dans le cas où la viscosité n'est pas négligée.

L'extension de la méthode de Sbardella et collab. [138] a permis de corriger son principal inconvénient, à savoir l'indépendance fréquentielle de la résistance modélisée. Des pistes ont été données afin d'augmenter le nombre de paramètres et ainsi espérer pouvoir modéliser une plus grande variété de lois d'impédance. Il serait notamment intéressant d'évaluer si ces pistes permettent de modéliser fidèlement un liner caractérisé par d'importantes pertes visco-thermiques au sein de ses cavités, cas pour lequel le modèle EHR ne permet pas une modélisation fine sur une bande fréquentielle étendue. En outre, l'application de la méthode au calcul par exemple du bruit rayonné par le flux secondaire d'un turboréacteur (comme dans [124]), permettrait de montrer sa capacité à traiter des configurations représentatives de problèmes aéronautiques, les liners modélisés lors de ces travaux de thèse étant des liners céramiques utilisés par l'industrie automobile. De plus, il serait intéressant de comparer les performances de la méthode, en terme de temps de calcul et de précision, à celle de Rienstra [131].

Enfin le code pourrait relativement aisément être étendu à l'étude hors conduit par ajout de couches PML dans la direction  $y$ . De plus, afin de rendre EMILE applicable à un plus grand nombre d'écoulements

(notamment obtenus par simulation), il conviendrait de considérer non pas la perturbation acoustique comme une perturbation des équations d'Euler mais comme une perturbation non visqueuse des équations de Navier-Stokes. Cela aurait pour conséquence d'ajouter une composante au vecteur d'état.

L'extension du code à des géométries tridimensionnelles permettrait d'étendre le champ d'applications du code EMILE. À titre d'exemple, cela rendrait possible la prise des effets tridimensionnelles sur les croissances transitoires se développant dans un conduit traité acoustiquement et ainsi de se rapprocher du cas expérimental. L'application du code à des géométries tridimensionnelles impliquant inévitablement une forte augmentation du nombre de degrés de liberté, l'extension au cas tridimensionnel ne sera possible qu'après avoir apporté les améliorations des performances citées précédemment.



## Cinquième partie

### Annexes



## ANNEXE A

### ÉCRITURE DES ÉQUATIONS D'EULER SOUS LA FORME D'UN SYSTÈME DE FRIEDRICH

#### A.1 Équation de continuité

En injectant  $\tilde{\rho}(x,y,t) = \rho_0(x,y) + \varepsilon \rho(x,y,t)$  et  $\tilde{U}(x,y,t) = \underline{U}_0(x,y) + \varepsilon \underline{u}(x,y,t)$  avec  $\varepsilon \ll 1$  dans l'équation de continuité (2.1a), on obtient en gardant les termes à l'ordre  $O(\varepsilon)$  :

$$\partial_t \rho + \nabla \rho_0 \cdot \underline{u} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u} + \nabla \rho \cdot \underline{U}_0 + \rho \nabla \cdot \underline{U}_0 = 0 \quad (\text{A.1})$$

En multipliant par  $\frac{a_0}{\rho_0}$ , on obtient :

$$\partial_t \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{a_0}{\rho_0} \nabla \rho_0 \cdot \underline{u} + a_0 \nabla \cdot \underline{u} + \frac{a_0}{\rho_0} \nabla \rho \cdot \underline{U}_0 + a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \underline{U}_0 = 0 \quad (\text{A.2})$$

L'écoulement moyen satisfaisant l'équation de continuité (stationnaire), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 \cdot \nabla \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) &= \frac{\rho}{\rho_0} \underline{U}_0 \cdot \nabla a_0 + \frac{a_0}{\rho_0} \nabla \rho \cdot \underline{U}_0 - \frac{a_0 \rho}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 \cdot \underline{U}_0 \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \underline{U}_0 \cdot \nabla a_0 + \frac{a_0}{\rho_0} \nabla \rho \cdot \underline{U}_0 + a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \underline{U}_0 \\ \iff \frac{a_0}{\rho_0} \nabla \rho \cdot \underline{U}_0 + a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \underline{U}_0 &= \underline{U}_0 \cdot \nabla \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{\rho}{\rho_0} \underline{U}_0 \cdot \nabla a_0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En injectant (A.3) dans (A.2), on obtient :

$$\partial_t \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{a_0}{\rho_0} \nabla \rho_0 \cdot \underline{u} + a_0 \nabla \cdot \underline{u} + \underline{U}_0 \cdot \nabla \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{1}{a_0} a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \underline{U}_0 \cdot \nabla a_0 = 0 \quad (\text{A.4})$$

L'équation de continuité fait ainsi intervenir à présent les variables  $\left( \underline{u}, a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right)$ , c'est la forme choisie par Ventribout dans sa thèse de doctorat [153].

##### A.1.1 Autre forme

On choisit d'écrire l'équation de continuité en variables  $\left( \underline{u}, a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right)$  sous une autre forme que (A.4) en écrivant le terme  $-\frac{1}{a_0} \underline{U}_0 \cdot \nabla a_0$  sous une autre forme.

On part de l'équation de l'énergie interne sous forme homentropique :

$$\nabla \cdot (\rho_0 e_0 \underline{U}_0) = -p_0 \nabla \cdot \underline{U}_0 \quad (\text{A.5})$$

Le gaz étant supposé idéal, on a  $e_0 = C_v T_0 = \frac{a_0^2}{\gamma(\gamma-1)}$  et  $p_0 = \frac{a_0^2 \rho_0}{\gamma}$ . En combinant les équations, on obtient l'égalité :

$$-\frac{1}{a_0} \underline{U}_0 \cdot \nabla a_0 = \frac{\gamma-1}{2} \nabla \cdot \underline{U}_0$$

L'équation de continuité en variables  $\left(\underline{u}, a_0 \frac{\rho}{\rho_0}\right)$  s'écrit alors :

$$\partial_t \left(a_0 \frac{\rho}{\rho_0}\right) + \frac{a_0}{\rho_0} \nabla \rho_0 \cdot \underline{u} + a_0 \nabla \cdot \underline{u} + \underline{U}_0 \cdot \nabla \left(a_0 \frac{\rho}{\rho_0}\right) + \frac{\gamma-1}{2} \nabla \cdot \underline{U}_0 a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0 \quad (\text{A.6})$$

C'est cette forme qui a été choisie par [47].

## A.2 Équation de quantité de mouvement

En injectant  $\tilde{\rho}(x,y,t) = \rho_0(x,y) + \varepsilon \rho(x,y,t)$  et  $\tilde{\underline{U}}(x,y,t) = \underline{U}_0(x,y) + \varepsilon \underline{u}(x,y,t)$  avec  $\varepsilon \ll 1$  dans l'équation de quantité de mouvement (2.1b), on obtient en gardant les termes à l'ordre  $O(\varepsilon)$  :

$$\rho_0 \partial_t \underline{u} + \rho_0 \underline{U}_0 \cdot \nabla \underline{u} + \rho_0 \underline{u} \cdot \nabla \underline{U}_0 + \rho \underline{U}_0 \cdot \nabla \underline{U}_0 + \nabla (a_0^2 \rho) = 0 \quad (\text{A.7})$$

L'écoulement porteur satisfaisant l'équation de quantité de mouvement, on a l'égalité :

$$\underline{U}_0 \cdot \nabla \underline{U}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 \quad (\text{A.8})$$

On réécrit le terme  $\nabla (a_0^2 \rho)$

$$\begin{aligned} \nabla (a_0^2 \rho) &= a_0 \nabla (a_0 \rho) + \rho_0 \nabla a_0 a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \\ &= a_0 \left( \rho_0 \nabla \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \nabla \rho_0 a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \rho_0 \nabla a_0 a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \\ &= a_0 \rho_0 \nabla \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \nabla (a_0 \rho_0) a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En injectant (A.8) et (A.9) dans (A.7), on obtient :

$$\partial_t \underline{u} + \underline{U}_0 \cdot \nabla \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{U}_0 + a_0 \nabla \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left( \nabla (a_0 \rho_0) - \frac{1}{a_0} \nabla p_0 \right) a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0 \quad (\text{A.10})$$

➤ Remarque : Le terme  $\frac{1}{\rho_0} \left( \nabla (a_0 \rho_0) - \frac{1}{a_0} \nabla p_0 \right)$  peut être remplacé par  $\left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\nabla (a_0 \rho_0)}{\rho_0} - \frac{1}{\gamma} \nabla a_0$ .

Les termes portant  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$  dans les équations de continuité et de quantité de mouvement diffèrent de ceux présentés dans [47]. Dans le cas de l'équation de continuité, l'erreur a été confirmée par Philippe Delorme. Dans le cas de l'équation de quantité de mouvement, nous pensons qu'il s'agit là encore d'une erreur.

Ces termes étant identiquement nuls dans le cas d'un écoulement parallèle ou d'un écoulement dont les variables thermodynamiques sont constantes, les résultats obtenus dans [47] ne sont pas remis en cause.

## ANNEXE B

### SOLUTIONS ANALYTIQUES DE MODES EN MILIEU GUIDÉ

Le spectre des modes acoustiques dans un conduit possède, sous certaines conditions, des solutions analytiques présentées dans cette annexe.

#### B.1 Configuration transverse avec écoulement uniforme

On s'intéressera dans un premier temps au cas d'un conduit à section rectangulaire puis au cas d'un conduit à section circulaire. Dans les deux cas, on suppose l'écoulement porteur uniforme et axial. On rappelle que la perturbation  $\varphi'$  est recherchée sous la forme :  $\varphi' = \varphi e^{ikz - i\omega t}$ .

L'équation obtenue pour une perturbation sous la forme d'onde  $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)}$  a été donnée au chapitre 2 (eq. (2.8)). L'hypothèse d'écoulement uniforme et axial ( $\underline{U}_0 = W_0 \underline{e}_z$ ) impose que l'opérateur  $\underline{\underline{B}}$  vérifie  $\underline{\underline{B}} \equiv 0$ .

##### B.1.1 Conduit à section rectangulaire

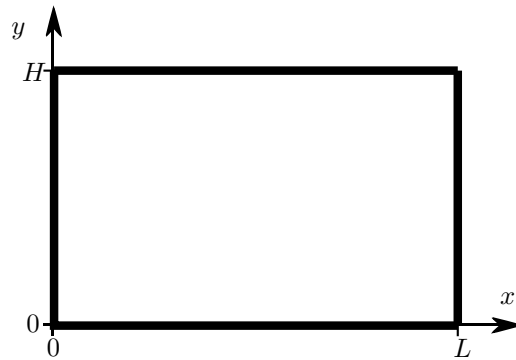


FIGURE B.1 – Géométrie de la section transverse d'un conduit rectangulaire.

Les solutions sont données dans un premier temps pour le cas d'un conduit de section rectangulaire, de hauteur  $H$  et de largeur  $L$  (voir figure B.1). Grâce aux hypothèses énumérées ci-dessus, le problème se simplifie en la résolution de l'équation de Pridmore-Brown :

$$\{\partial_x^2 + \partial_y^2\} a_0 \frac{\rho}{\rho_0} + A^2 a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Avec  $A^2 = \frac{\omega^2 - 2W_0\omega k_z + (W_0^2 - a_0^2)k_z^2}{a_0^2}$ . La géométrie du problème autorise la recherche d'une solution en variables séparées :  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x, y) = f(x)g(y)$ . D'où :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + A^2 = -\frac{g''(y)}{g(y)} = k_y^2 \quad (\text{B.2})$$

Pour pouvoir résoudre mathématiquement les deux équations différentielles issues de cette équation, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites. On considérera alors le cas d'un conduit à section rigide puis le cas d'un conduit à section rigide présentant un liner sur sa paroi inférieure (d'autres configurations peuvent être aisément analysées en raisonnant de la même façon que dans ce cas).

Le calcul de  $g(y)$  dépend du cas considéré. En revanche, dans les deux cas, l'obtention de  $f(x)$  passe par la résolution de l'équation différentielle

$$f''(x) + (A^2 - k_y^2)f(x) = 0 \text{ avec } \forall y \ f'(0) = f'(L) = 0$$

La résolution de cette équation donne  $f(x) = C_1 e^{i\sqrt{A^2 - k_y^2}x} + C_2 e^{-i\sqrt{A^2 - k_y^2}x}$  ( $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes d'intégrations). Les conditions aux limites impliquent que  $\sqrt{A^2 - k_y^2} = \frac{m\pi}{L}$  avec  $m$  un entier quelconque, ainsi que  $C_1 = C_2$  d'où  $f(x) = C \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ . Le mode a ainsi  $m/2$  longueurs d'onde selon  $x$ .

#### B.1.1.1 Paroi inférieure rigide

Dans le cas où les quatre parois sont rigides, l'obtention de la solution  $g(y)$  passe par la résolution de :

$$g''(y) + k_y^2 g(y) = 0 \text{ avec } g'(0) = g'(H) = 0$$

La solution est  $g(y) = D_1 e^{ik_y y} + D_2 e^{-ik_y y}$  ( $D_1$  et  $D_2$  sont les constantes d'intégrations). On déduit des conditions aux limites que  $k_y = \frac{n\pi}{H}$  ainsi que  $D_1 = D_2$  d'où  $g(y) = D \cos\left(\frac{n\pi}{H}y\right)$ .

Finalement, la relation de dispersion permet d'obtenir la valeurs des nombres d'ondes aval  $k_z^+$  et amont  $k_z^-$  :

$$k_z^\pm = \frac{\frac{\omega M}{a_0} \mp \sqrt{\frac{\omega^2}{a_0^2} + (M^2 - 1)\pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)}}{M^2 - 1} \text{ avec } (m, n) \in \mathbb{N}^2,$$

où  $M = \frac{W_0}{a_0}$  est le nombre de Mach de l'écoulement (nous rappelons que ce dernier est supposé uniforme).

En notant  $k_T = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}$  le nombre d'onde transverse, on remarque ainsi que pour  $\omega < 2\pi f_c = a_0 \sqrt{1 - M^2} k_T$  les modes sont évanescents :  $\Im(k^+) > 0$  et  $\Im(k^-) < 0$ ,  $f_c$  est appelée fréquence de coupure. La valeur de  $f_c$  diminue quand  $M$  augmente et ainsi plus de modes peuvent se propager.

Contrairement au cas sans écoulement, il est possible pour  $M \neq 0$  d'avoir des modes se propageant vers les  $z$  positifs pour lesquels  $k_z^+ < 0$ . Un tel mode satisfait la relation :

$$1 \geq \frac{\omega^2}{a_0^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)} \geq 1 - M^2.$$

Il est possible, à l'inverse, d'exprimer  $\omega$  en fonction de  $k_z$  :

$$\omega = M k_z a_0 + a_0 \sqrt{k_z^2 + \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)}.$$

La vitesse de groupe  $c_g = d_k \omega$  est :

$$c_g = \frac{\omega M + (1 - M^2)k_z a_0}{\omega - k_z a_0 M} a_0 .$$

À cette famille de modes acoustiques s'ajoute un mode convecté par l'écoulement satisfaisant la relation de dispersion  $\omega = k_z M a_0$ , condition menant à une dégénérescence des équations d'Euler linéarisées.

### B.1.1.2 Paroi inférieure traitée

Si seule la paroi inférieure est non rigide et d'impédance  $Z$ , la détermination de la solution passe par la résolution de (l'écoulement étant glissant à la paroi, la condition d'Ingard-Myers eq. (2.12) est utilisée) :

$$g''(y) + k_y^2 g(y) = 0 \text{ avec } g'(H) = 0 \text{ et } \frac{a_0 i Z \omega}{(\omega - W_0 k_z)^2} g'(0) = g(0) .$$

La résolution de cette équation donne

$$g(y) = D \cos(k_y(y - H))$$

et

$$H k_y \tan(H k_y) = \frac{H (\omega - W_0 k_z)^2}{a_0 i Z \omega}$$

avec (rappel)

$$k_y = \sqrt{\frac{(\omega - W_0 k_z)^2}{a_0^2} - k_z^2 - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} .$$

### B.1.2 Conduit à section circulaire avec écoulement uniforme

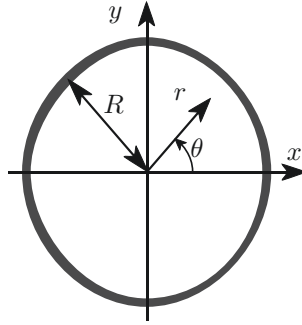


FIGURE B.2 – Géométrie de la section transverse d'un conduit circulaire.

Dans le cas d'un conduit de section circulaire de rayon  $R$  (voir figure B.2), la recherche d'une solution analytique passe dans un premier temps par l'écriture des équations en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , la vitesse acoustique s'écrivant alors :  $\underline{u} = u \underline{e}_r + v \underline{e}_\theta + w \underline{e}_z$  :

$$\begin{cases} -i\omega u + W_0 i k_z u + a_0 \partial_r \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) = 0 \\ -i\omega v + W_0 i k_z v + \frac{a_0}{r} \partial_\theta \left( a_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right) = 0 \\ -i\omega w + W_0 i k_z w + a_0 i k_z a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0 \\ -i\omega a_0 \frac{\rho}{\rho_0} + a_0 \partial_r u + \frac{a_0}{r} u + \frac{a_0}{r} \partial_\theta v + a_0 i k_z w + W_0 i k_z a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Les quatre équations se combinent pour donner place à l'équation de Pridmore-Brown :

$$A^2 a_0 \frac{\rho}{\rho_0} + \left\{ \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right\} a_0 \frac{\rho}{\rho_0} = 0 \text{ avec } A^2 = \frac{k_z^2 (W_0^2 - a_0^2) - 2\omega k_z W_0 + \omega^2}{a_0^2} \quad (\text{B.4})$$

Comme dans le cas rectangulaire, la solution est cherchée comme étant à variables séparées :  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ . L'équation de Pridmore-Brown se réécrit alors :

$$-A^2 r^2 - \frac{1}{f(r)} (r^2 f''(r) + r f'(r)) = \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -m^2 \quad (\text{B.5})$$

D'où  $g(\theta) = e^{im\theta}$  et étant donné la périodicité de la solution,  $m$  est un entier. L'équation sur  $f$  s'écrit :

$$\frac{m^2}{A^2 r^2} - 1 = \frac{1}{f(r)} \left( \frac{f''(r)}{A^2} + \frac{1}{Ar} \frac{f'(r)}{A} \right)$$

On pose alors  $\sigma = Ar$  et  $F(\sigma) = f(r)$  :

$$\frac{m^2}{\sigma^2} - 1 = \frac{1}{F(\sigma)} \left( F''(\sigma) + \frac{1}{\sigma} F'(\sigma) \right)$$

La solution  $F$  de cette équation différentielle est une fonction de Bessel notée  $J_m$  de première espèce d'ordre  $m$ . Afin de pouvoir finalement déterminer le spectre, il faut imposer une condition limite. On considérera dans un premier temps le cas d'un conduit à section rigide puis dans un second temps le cas où un liner d'impédance  $Z$  recouvre la paroi.

#### B.1.2.1 Conduit à section rigide

Au niveau de la paroi, la condition limite s'écrit  $F'(\sigma) = 0$ . En notant alors  $Z_{m,n}$  le  $n^{\text{ème}}$  zéro de la dérivée de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $m$ , la condition limite s'écrit  $Z_{m,n} = AR$  et le spectre spatial est alors donné par :

$$k = \frac{\frac{\omega M}{a_0} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2 - (1 - M^2) \left(\frac{Z_{m,n}}{R}\right)^2}}{M^2 - 1} \quad (\text{B.6})$$

Et  $f(r) = F(\sigma) = J_m \left( Z_{m,n} \frac{r}{R} \right)$ .

Comme dans le cas d'un conduit à section rectangulaire, il existe une fréquence de coupure en dessous de laquelle un mode  $(m, n)$  sera évanescent :  $f_c = a_0 \sqrt{1 - M^2} \frac{Z_{m,n}}{2\pi R}$ .

#### B.1.2.2 Conduit traité acoustiquement

L'écoulement porteur est ici supposé nul et la condition aux limites sur la paroi inférieure est une condition aux limites d'impédance (eq. (2.11))  $Z$ . Le cas avec écoulement est traité dans la référence [126]. La condition aux limites d'impédance impose  $\frac{f'(R)}{f(R)} = \frac{i\omega}{a_0 Z}$ . Les nombres d'ondes théoriques sont donnés par :

$$k = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{Y_{m,n}}{R}\right)^2} \quad (\text{B.7})$$

Où  $Y_{m,n}$  est la  $n^{\text{ème}}$  solution de :

$$\frac{X F'(X)}{F(X)} = i \frac{\omega R}{a_0 Z} \quad (\text{B.8})$$

La résolution numérique de (B.8) n'est pas directe, le problème devenant «raide» quand  $\omega$  augmente. Le calcul se fait en suivant la méthode proposée par [126] : on part de la solution rigide  $Y_{m,n} = Z_{m,n}$ . On suit alors  $Y_{m,n}$  en itérant sur la valeur de la réactance<sup>1</sup> : on part de  $Z' = \Re(Z) + i\varepsilon^{-1}$  où  $\varepsilon \ll 1$  pour arriver à  $Z' = Z$ .

1. On notera que l'on peut tirer avantageusement du fait que  $J'_m(x) = \frac{J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)}{2}$  si  $m > 0$  et  $J'_0(x) = -J_1(x)$ .  $J'_m(x)$  étant la dérivée de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $m$



## B.2. Configuration longitudinale

En pratique, la valeur initiale de la réactance a été choisie comme étant  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Le pas de descente est contrôlé de façon adaptative afin de limiter l'écart sur  $Y_{m,n}$  entre deux itérations<sup>2</sup>.

Sur la figure B.3 sont tracées des valeurs de  $Z_{m,n}$  obtenues avec une pulsation adimensionnée (par  $R$  et  $a_0$ )  $\bar{\omega} = 30$  et  $Z = 2 + i$ . On observe que les solutions pour  $n = 1$  sont isolées et sont caractérisées par une valeur imaginaire de  $Y_{m,n}$  plus grande. Ces solutions correspondent en fait aux modes de surface, existants uniquement pour  $\Im(Z) > 0$ .

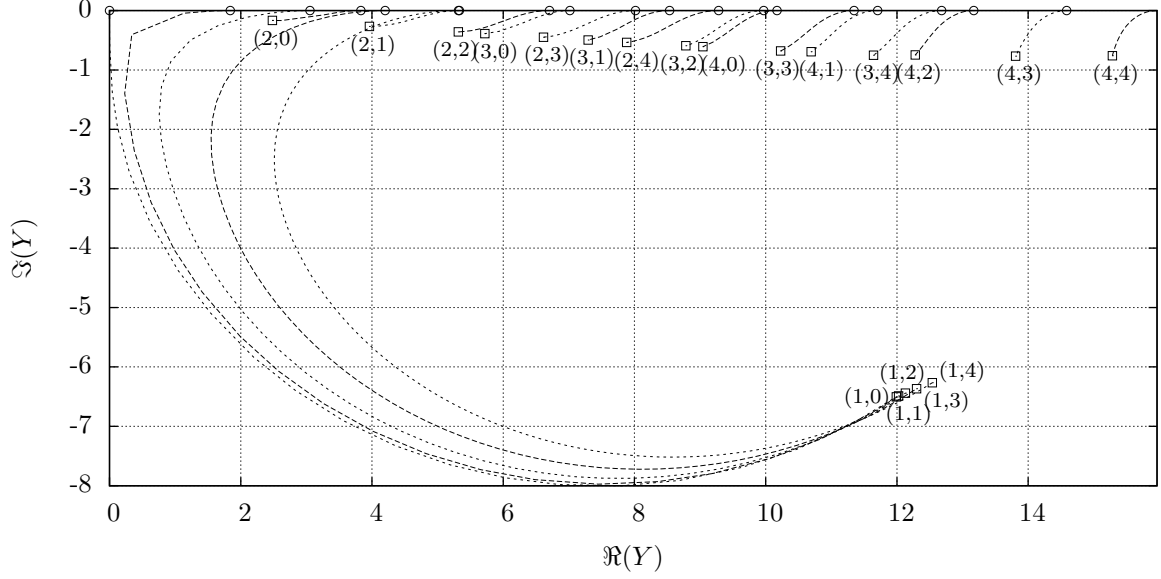


FIGURE B.3 – Solutions  $Y_{m,n}$  de l'équation (B.8), dénotées  $(m,n)$  sur la figure. Résultats obtenus avec une pulsation adimensionnée (par  $R$  et  $a_0$ )  $\bar{\omega} = 30$  et  $Z = 2 + i$ .

## B.2 Configuration longitudinale

### B.2.1 Conduit invariant avec écoulement uniforme

Dans le cas d'une configuration longitudinale invariante en  $x$  et en présence d'un écoulement axial et uniforme  $U_0 = U_0 \underline{e}_x = a_0 M \underline{e}_x$ , la perturbation acoustique peut s'écrire  $\varphi(x,y,t) = \check{\varphi}(y) e^{i(k_x x - \omega t)}$ .

Une solution analytique est obtenue en simplifiant les résultats donnés en section B.1.1 (ou en menant directement une résolution à variables séparées) :

$$a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x,y,t) = \left( A e^{i k_x^+ x} + A e^{i k_x^- x} \right) \cos \left( \frac{m\pi}{H} \left( y + \frac{H}{2} \right) \right) e^{i\omega t}$$

avec :

$$k_x^\pm = \frac{\frac{\omega M}{a_0} \mp \sqrt{\frac{\omega^2}{a_0^2} + (M^2 - 1) \left( \frac{n\pi}{H} \right)^2}}{M^2 - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^2,$$

ou

$$\omega = M k_x a_0 + a_0 \sqrt{k_x^2 + \left( \frac{n\pi}{H} \right)^2}.$$

La vitesse de groupe est donnée par :

$$c_g = a_0 \frac{\omega M + (1 - M^2) k_x a_0}{\omega - k_x a_0 M}.$$

<sup>2</sup>. On a remarqué que choisir un pas inversement proportionnel au produit  $m n$  permettait une meilleure vitesse de calculs

Les modes acoustiques de vitesse de groupe nulle sont donnés par les couples  $(\omega; k_x)$  :

$$\left( \omega = a_0 \frac{n\pi}{H} (1 - M^2); k_x = M \frac{n\pi}{H} \right).$$

➤ Remarque : Aux modes acoustiques s'ajoute un mode convecté par l'écoulement satisfaisant la relation de dispersion  $\omega = k_x M a_0$ , condition menant à une dégénérescence des équations d'Euler linéarisées.

### B.2.2 Conduit ouvert obstrué par deux plaques perforées

Soit un conduit ouvert de hauteur  $H$  où sont placées deux plaques perforées de résistance  $R$  en  $x = \pm L = \pm H/2$  (où sont imposées des conditions de Darcy), voir figure B.4. L'étude se fait pour un écoulement porteur nul.

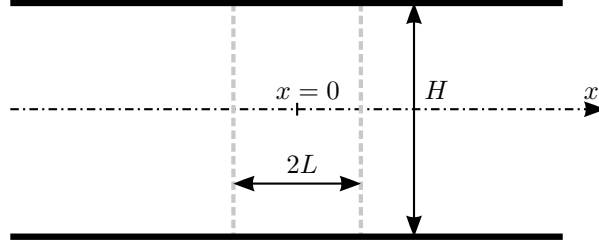


FIGURE B.4 – Conduit obstrué par deux plaques perforées (représentées par les deux segments gris en pointillé).

Pour obtenir une solution analytique des modes résonants, nous suivons la démarche proposée par Hein et collab. [65, section 3.1]. En reprenant les résultats de la section précédente<sup>3</sup>, nous cherchons une solution à variables séparées

$$a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x, y, t) = f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{H} \left(y + \frac{H}{2}\right)\right) e^{-i\omega t}$$

avec :

$$f(x) = \begin{cases} E_0 e^{i k_x x} + R_0 e^{-i k_x x}, & x \leq -L, \\ A e^{i k_x x} + B e^{-i k_x x}, & -L < x < L, \\ T_0 e^{i k_x x}, & x \geq L. \end{cases}$$

Les raccords sont alors imposés en  $x = \pm L$  : condition de Darcy et continuité de la vitesse normale (c'est-à-dire de  $d_x f$ ). Le système d'équations ainsi obtenu permet d'obtenir une expression du facteur d'amplitude réfléchi :

$$r = \frac{R_0}{E_0} = R a_0 k_x e^{-2i k_x L} \frac{-4\omega \cos(2k_x L) + 2i R a_0 k_x \sin(2k_x L)}{-4\omega R a_0 k_x e^{-2i k_x L} - 4e^{-2i k_x L} \omega^2 - R^2 a_0^2 k_x e^{-2i k_x L} + R^2 a_0^2 k_x e^{2i k_x L}}. \quad (\text{B.9})$$

L'obtention d'une solution non triviale pour  $E_0 = 0$  implique que le dénominateur de l'équation (B.9) soit nul. Les fréquences ainsi obtenues sont les fréquences de résonance.

Le mode résonant  $(m; n)$  est donné par la  $m$ -ième solution de l'équation :

$$2\omega R a_0 k_x + 2\omega^2 = i \tan(2k_x L) (2\omega Z a_0 k_x + 2\omega^2 + Z^2 a_0^2 k_x^2).$$

Pour  $n = 0$ , une solution est donnée par :

$$\omega_{0;n} = \frac{a_0}{2L} \left( \arctan\left(-2i \frac{Z+1}{Z^2+2Z+2}\right) + m\pi \right),$$

sinon une solution est obtenue numériquement à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. L'initialisation se fait à partir des modes rigides hormis pour  $m = 0$  où une connaissance a priori de la valeur de la pulsation propre est nécessaire.

3. Avec  $M = 0$ ,  $k_x^\pm = \pm k_x = \pm \sqrt{(\omega/a_0)^2 - (m\pi/H)^2}$ .

### B.2.3 Conduit fermé sans écoulement

Les deux solutions ci-dessous sont obtenues en simplifiant les solutions obtenues section B.1.1. Soit un conduit fermé de hauteur  $H$  et de longueur  $L$ . Les parois gauche, haute et droite sont rigides. La paroi inférieure est dans un premier temps prise rigide puis traitée acoustiquement dans un deuxième temps.

#### B.2.3.1 Paroi inférieure rigide

La fonction propre du mode  $(m,n)$  est donnée par

$$a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x,y) \sim \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{H}y\right),$$

et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = a_0 \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}. \quad (\text{B.10})$$

#### B.2.3.2 Paroi inférieure traitée acoustiquement

La paroi inférieure est caractérisée par une impédance  $Z$ , la fonction propre du mode  $(m,n)$  s'écrit alors :

$$a_0 \frac{\rho}{\rho_0}(x,y) \sim \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos(k_y y),$$

où  $k_y$  est donnée par la  $n$ -ième solution de l'équation :

$$Hk_y \tan(Hk_y) = \frac{H\omega}{a_0 i Z}$$

avec :

$$k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{a_0^2} - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}.$$



En parallèle du code **EMILE**, un solveur Galerkin discontinu sur des maillages unidimensionnels a été développé au cours de ce travail de thèse. Ce code unidimensionnel a été développé dans l'objectif de pouvoir effectuer des études préliminaires ou d'analyse du comportement général de la méthode Galerkin discontinue. Ce code a de plus été utilisé pour déterminer l'impédance à partir d'un couple  $(\omega ; k)$ . Bien que ce code soit applicable à l'analyse de stabilité locale, nous avons préféré utilisé le code **MAMOUT** [28] pour effectuer celle-ci.

Nous présentons dans ce chapitre annexe la discrétisation unidimensionnelle ainsi que quelques applications du code.

## C.1 Solveur Galerkin discontinu unidimensionnel

Deux formulations peuvent être résolues par le code unidimensionnel, la première purement unidimensionnelle consiste en la résolution des équations :

$$\partial_t \underline{\varphi} + \underline{A} \partial_x \underline{\varphi} + \underline{B} \underline{\varphi} = 0.$$

La formulation Galerkin discontinue correspondante a été développée en section 7.2.2.

La deuxième formulation fait apparaître une direction supplémentaire supposée homogène, les équations associées sont :

$$\partial_t \underline{\varphi} + i k_x \underline{A}_x \underline{\varphi} + \underline{A}_y \partial_y \underline{\varphi} + \underline{B} \underline{\varphi} = 0 .$$

La formulation Galerkin discontinue est développée en suivant la même démarche que celle suivie précédemment dans ce manuscrit de thèse. Seules les matrices de flux sont données ici. La matrice de flux inter-élément en formulation forte est :

$$\left[ \underline{A}_y n_y \right]^- = \frac{a_0}{2} \min(0 ; n_y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{a_0}{2} \max(0 ; n_y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ce flux est valide dans le cas où l'écoulement porteur a une composante nulle selon  $y$ . La matrice qui permet d'imposer le coefficient de réflexion  $\beta$  est :

$$\underline{M}(\beta) = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta + 1 & n_y(\beta - 1) \\ 0 & -n_y(\beta + 1) & 1 - \beta \end{pmatrix} .$$

Le code permet l'utilisation de polynômes d'ordre quelconque, les points de contrôle sont déterminés via un processus d'optimisation visant à minimiser la constante de Lebesgue (voir [69, section 3.1]).

## C.2 Détermination de l'impédance

Considérons un conduit bidimensionnel (la direction  $z$  est omise) invariant selon son axe  $x$ . La paroi supérieure située en  $y = H$  est rigide tandis que la paroi inférieure située en  $y = 0$  est revêtue d'un matériau absorbant d'impédance  $Z$ .

Pour une telle configuration, il est possible de déterminer pour un couple  $(\omega, k_z)$  la valeur de l'impédance admissible. Pour cela, l'idée est de décomposer la matrice de flux  $\underline{\underline{M}}(\beta)$  (nous rappelons que  $\beta$  est le coefficient de réflexion défini par  $\beta = (Z - 1)/(Z + 1)$ ) en :

$$\underline{\underline{M}}(\beta) = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n_y \\ 0 & -n_y & -1 \end{pmatrix} \beta + \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n_y \\ 0 & -n_y & 1 \end{pmatrix}.$$

Le problème aux valeurs propres généralisé s'écrit alors :

$$\underline{\underline{D}}\underline{\underline{\varphi}} = -\beta\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\varphi}}$$

où les matrices globales  $\underline{\underline{D}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{D}} \longleftrightarrow \int_{U_l} \left( -i\omega\underline{\underline{\varphi}} + ik\underline{\underline{A}}_x\underline{\underline{\varphi}} + \underline{\underline{A}}_y \partial_y \underline{\underline{\varphi}} + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{\varphi}} \right) \cdot \underline{\underline{\psi}}_m \, d\Gamma + \left[ \left[ \underline{\underline{A}}_y n_y \right]^- \underline{\underline{\varphi}} \cdot \underline{\underline{\psi}}_m \right]^{y_l^+ : y_l^-} \\ \quad + \left[ \underline{\underline{M}}(\beta = 1) \underline{\underline{\varphi}} \cdot \underline{\underline{\psi}}_m \right]^{y=H} + \left[ \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n_y \\ 0 & -n_y & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\varphi}} \cdot \underline{\underline{\psi}}_m \right]^{y=0} \\ \underline{\underline{E}} \longleftrightarrow \left[ \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n_y \\ 0 & -n_y & -1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\varphi}} \cdot \underline{\underline{\psi}}_m \right]^{y=0} \end{array} \right.$$

À titre de validation, un calcul de stabilité locale spatiale a été effectué à l'aide du code MAMOUT [28] dans un conduit de hauteur  $H = 5\text{cm}$  traversé par un écoulement de Poiseuille de Mach moyen  $M = 0,36$  pour  $\omega = 6000 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $Z = 1 + 2i$ . Le calcul est effectué à l'aide de 75 polynômes de Chebyshev et le mode plan ainsi déterminé a pour nombre d'onde :  $k_x = 14,5 + 0,83i$ . Le couple  $(\omega; k_x)$  est alors donné en entrée du code de détermination de l'impédance et celle-ci permet de retrouver  $Z = 1 + 2i$  avec une précision relative de  $1,5 \times 10^{-5}$  (le domaine unidimensionnel est maillé par 25 éléments et la solution est approximée sur ces éléments par des polynômes d'ordre six).

En outre, et toujours à titre de validation, les impédances déterminées en section 5.3.1 dans le banc B2A en absence d'écoulement à l'aide de la solution analytique

$$Z = \frac{\omega}{ia_0 k_y \tan(Hk_y)}$$

ont été comparées aux impédances déterminées numériquement à l'aide du solveur unidimensionnel. L'écart maximal pour les cinq pulsations entre les deux jeux d'impédances déterminées est alors de  $4 \times 10^{-14}$ .

➤ **Remarque :** Le code unidimensionnel a été développé en choisissant  $x$  comme axe du conduit. Lors de l'utilisation de ce code en section 5.3.3 l'axe du conduit était  $z$ . Le lecteur est ainsi invité à faire la correspondance entre  $x$  et  $z$  lors de l'interprétation des résultats présentés en section 5.3.3.

## C.3 Couche critique

Considérons la configuration longitudinale relative à un conduit invariant. La direction  $x$  étant homogène, la perturbation acoustique est prise sous la forme  $\sim \exp(i(k_x x - \omega t))$ . Dans le cas d'un écoulement cisailé, l'opérateur fait apparaître une famille de modes acoustiques correspondant aux modes acoustiques trouvés analytiquement avec un écoulement uniforme (voir annexe B). Dans le cas d'un écoulement uniforme, il existait en plus un mode convecté par l'écoulement satisfaisant la relation de dispersion  $\omega = k_x U_0$ .

Si l'écoulement est cisailé, la relation de dispersion  $\omega = k_x U_0(y)$  mène à une infinité de modes convectés par l'écoulement. Dans le cas d'une étude modale temporelle, une branche continue de modes est observée pour

$$\omega \in k_x \times [\min U_0(y); \max U_0(y)] .$$

Ces modes ont été étudiés par Brazier [26] et il a été montré que la composante de vitesse  $u$  est discontinue au voisinage du point critique (point  $y_c$  tel que  $\omega = k_x U_0(y_c)$ ) avec des valeurs infinies de part et d'autre si  $d_y^2 U_0(y_c) \neq 0$  et la composante  $v$  est continue mais de dérivée première singulière si  $d_y^2 U_0(y_c) \neq 0$ .

Dans cette section, nous illustrons dans un cas simple le calcul des modes de la branche continue par la méthode Galerkin discontinue. Le domaine de résolution est ici unidimensionnel et l'équation à résoudre est :

$$-i\omega \varphi + ik_x \underline{A}_x \varphi + \underline{A}_y \partial_y \varphi + \underline{B} = 0 . \quad (C.1)$$

Où  $\underline{A}_x$ ,  $\underline{A}_y$ ,  $\underline{B}$  et  $\varphi$  sont identiques à ceux définis en section 2.1.2 pour une configuration longitudinale.

Le calcul est mené pour un conduit de hauteur  $H = 15$  mm traversé par un écoulement de Poiseuille de Mach moyen  $M = 0,2$  et le nombre d'onde imposé est  $k_x H = 2,57$ . Le domaine de calcul  $y \in [0; H]$  est maillé par 10 éléments unidimensionnels sur lesquels la solution est approximée par des polynômes d'ordre 6. Sur la figure C.1(a) est tracé une portion du spectre obtenu. Celle-ci est composée de la branche continue ainsi que de six modes acoustiques proches de ceux obtenus pour un écoulement uniforme de Mach  $M = 0,3$  (croix noires). La figure C.1(b) correspond à un zoom sur la branche continue. Les lignes verticales en pointillés noirs correspondent aux valeurs  $\omega = \{k U_0(y_{GD}) H / a_0 \mid y_{GD} \in Y_{GD}\}$  où  $Y_{GD} = H \times \{0; 0,1; \dots; 0,9; 1\}$  est l'ensemble des points définissant le maillage utilisé.

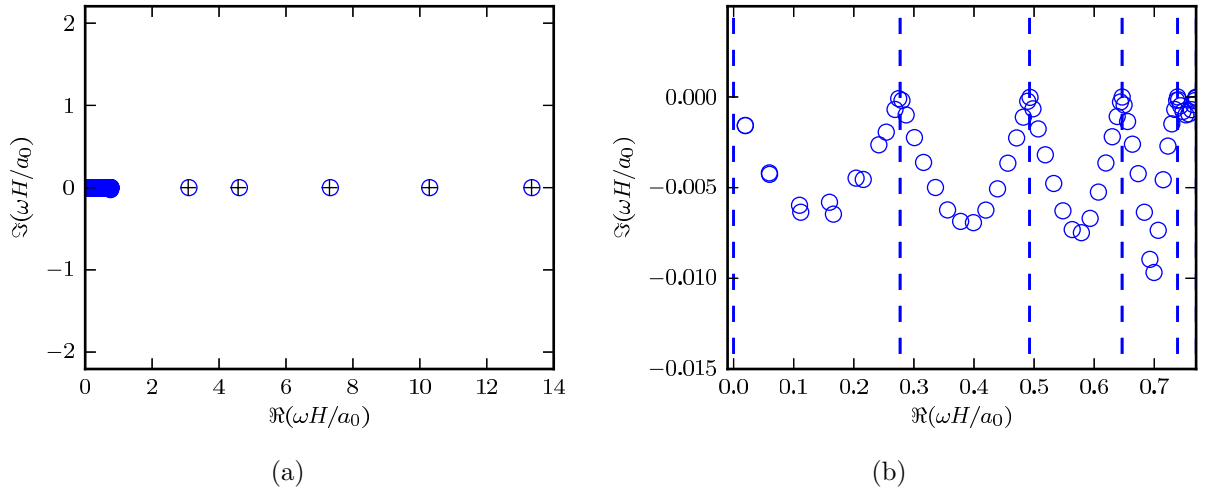


FIGURE C.1 – Fréquences propres pour un écoulement de Poiseuille (○) de Mach  $M = 0,3$  pour un nombre d'onde  $kH = 2,03$ . Les croix noires représentent les fréquences obtenues analytiquement pour un écoulement uniforme de Mach  $M = 0,3$ . Zoom sur la branche continue (b), les lignes pointillées correspondent à  $\{k U_0(y_{GD}) H / a_0 \mid y_{GD} \in Y_{GD}\}$ .

Les modes de la branche continue sont ainsi calculés plus précisément si leurs valeurs propres associées sont proches de  $k U_0(y_{GD})$  avec  $y_{GD} \in Y_{GD}$ . Un mode de la branche continue pour lequel  $\omega = k U_0(y_{GD})$ ,  $y_{GD} \in Y_{GD}$  voit son point critique être à l'interface entre deux éléments unidimensionnels du maillage. Ainsi la discontinuité sur la composante de vitesse  $u$  n'a pas d'impact sur le calcul puisque le flux inter-éléments ne dépend que des sauts de vitesse normale et la variable  $a_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ .

➤ Remarque : L'écoulement étant symétrique par rapport à  $y = H/2$  un mode de la branche continue fait apparaître deux points critiques (excepté celui de pulsation propre  $k U_0(H/2)$ ). Le maillage utilisé étant de même symétrique par rapport à  $y = H/2$  nous parlerons de point critique au singulier bien qu'il y ait deux points critiques.

Sur les figures C.2(a),(b) et (c) sont tracées respectivement les fonctions propres  $\Re(u)$ ,  $\Re(v)$  et  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  correspondant à la valeur propre  $\omega H/a_0 = k_x U_0(y/H = 0.2) \approx 0,49$  ( $y/H = 0.2$  est un nœud du maillage). Les fonctions propres sont bien calculées, la discontinuité de  $u$  au point critique est notamment visible et ne crée pas de pollution numérique au voisinage du point critique. De plus, nous observons qu'au voisinage du point critique,  $u$  a une amplitude relativement élevée ce qui traduit numériquement le caractère théoriquement infini. À l'inverse, nous nous intéressons au mode de valeur propre  $\omega H/a_0 \approx 0,37 - 0,04i$

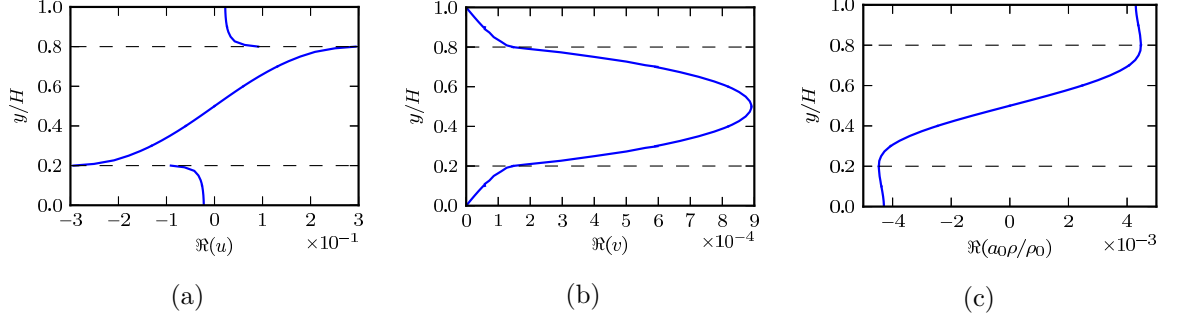


FIGURE C.2 – Fonctions propres  $\Re(u)$  (a),  $\Re(v)$  (b) et  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  (c) associées à la valeur propre  $\omega H/a_0 = k_x U_0(y/H = 0.2) \approx 0,49$ . Les lignes pointillées donnent la position du point critique.

pour lequel le point critique ne correspond pas à un nœud du maillage (la position du point critique  $y/H = 0.85$  est déterminée à partir de la partie réelle de la valeur propre :  $\Re(\omega)H/a_0 = k_x U_0(y/H = 0.85)$ ). Les fonctions propres associées  $\Re(u)$ ,  $\Re(v)$  et  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  sont respectivement tracées figures C.3(a)(b) et (c). Bien que le point critique ne corresponde pas à un nœud du maillage, les fonctions propres  $\Re(v)$  et  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  semblent être bien approximées contrairement à la fonction propre  $\Re(u)$ . Pour cette dernière, la solution présente un pic au niveau du point critique. L'impossibilité de capturer la discontinuité de la solution semble avoir un effet sur tout l'élément du maillage sur lequel le point critique se trouve (s'étendant sur  $y/H \in [0,8; 0,9]$ ) : en effet nous observons que la solution présente des discontinuités sur les bords de l'élément (en  $y/H = 0,8$  et  $y/H = 0,9$ ) qui sont purement numériques.

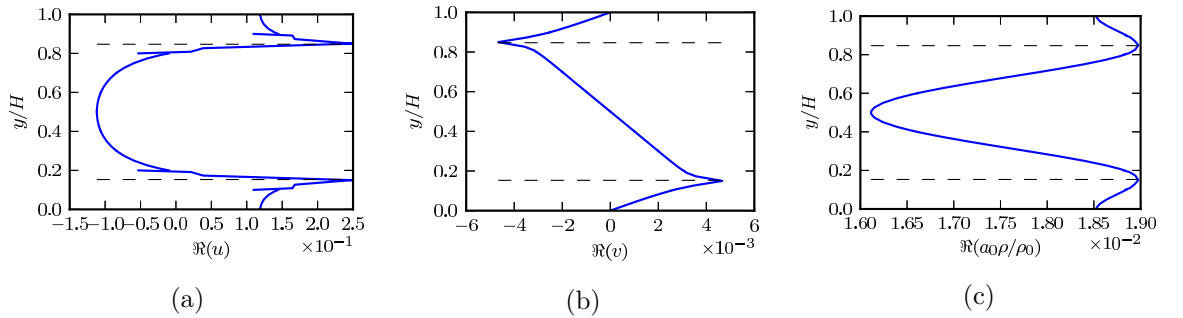


FIGURE C.3 – Fonctions propres  $\Re(u)$  (a),  $\Re(v)$  (b) et  $\Re(a_0 \frac{\rho}{\rho_0})$  (c) associées à la valeur propre  $\Re(\omega)H/a_0 = k_x U_0(y/H = 0.85) \approx 0,37$ . Les lignes pointillées donnent la position du point critique.

Afin d'illustrer l'effet de l'ordre des polynômes sur le calcul des modes de la couche critique, nous comparons le spectre tracé figure C.1(b) à celui obtenu sur 25 éléments avec des polynômes d'ordre deux, cela menant à un problème à 225 degrés de liberté contre 210 pour celui effectué avec des polynômes d'ordre 6. L'utilisation de polynômes d'ordre plus faible induit un plus grand nombre d'éléments pour un nombre de degrés de liberté fixé et donc plus de points critiques se situant à des jonctions entre éléments. Les valeurs propres correspondantes sont relativement bien calculées ( $\Im(\omega)$  est proche de zéro). En revanche, nous observons que  $\Im(\omega)$  est bien plus élevé dès que le point critique d'un mode ne se situe pas à une interface entre éléments.



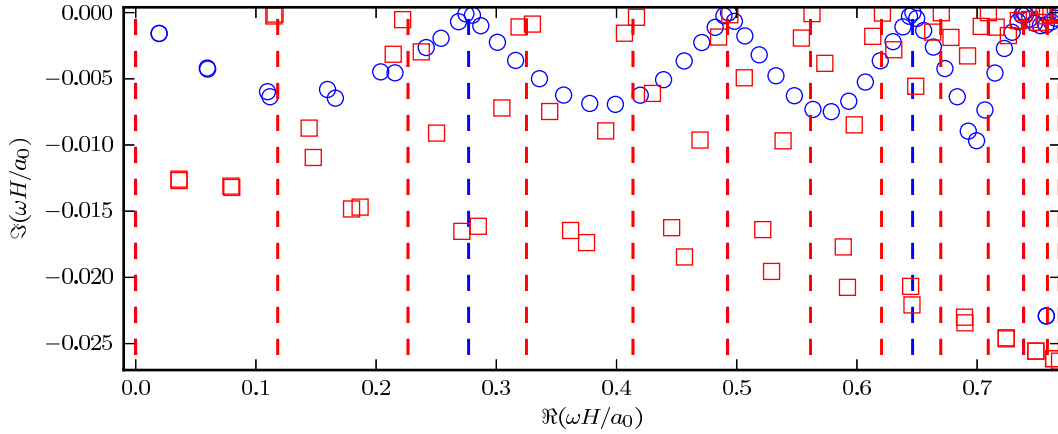


FIGURE C.4 – Valeurs propres pour un écoulement de Poiseuille de Mach  $M = 0,3$  et pour un nombre d'onde  $kH = 2,03$ , discrétisation avec des polynômes d'ordre six ( $\circ$ ) et des polynômes d'ordre deux ( $\square$ ). Les lignes pointillées correspondent à  $\{kU_0(y_{GD})H/a_0 \mid y_{GD} \in Y_{GD}\}$ .

## C.4 Étude paramétrique unidimensionnelle d'une couche PML

Nous nous proposons dans cette section d'étudier l'effet des paramètres PML  $x_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\beta$  et  $d$ . L'étude est menée dans un cadre modal en absence d'écoulement sur la configuration unidimensionnelle représentée figure C.5(a) : le domaine physique est  $x \in ]-\infty, \infty[$  où sont imposées deux conditions de Darcy de résistance  $R = 1$  en  $x = -L$  et  $x = L = 5$  cm. Par symétrie, le domaine de calcul se limite à  $x \geq 0$  et est tronqué grâce à une couche PML placée en  $x_0$  et d'épaisseur  $d$  (Fig. C.5(b)).

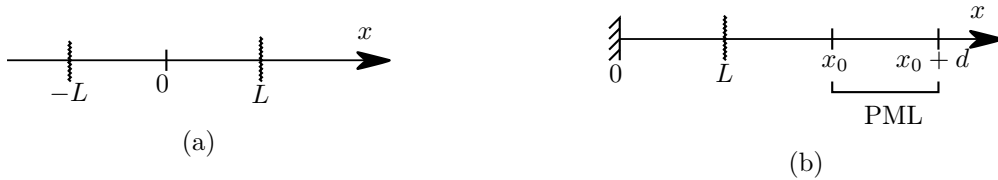


FIGURE C.5 – Configuration unidimensionnelle : domaine physique (a) et domaine de calcul (b).

Les équations d'Euler linéarisées unidimensionnelles avec PML s'écrivent :

$$\begin{cases} -i(1 + i\Sigma')\omega u + a_0 \partial_x u_p = 0 \\ -i(1 + i\Sigma')\omega u_p + a_0 \partial_x u = 0 . \end{cases}$$

Le problème physique admet comme solution analytique (voir section B.2.2) :

$$\omega_n \frac{L}{a_0} = n\pi + \ln \left( \sqrt{\frac{R}{R+2}} \right) i . \quad (\text{C.2})$$

### C.4.1 Étude préliminaire : précision numérique

Avant de pouvoir étudier l'effet des paramètres de la couche PML sur la précision générale du calcul, il est nécessaire de définir la précision numérique liée au maillage. La configuration étudiée correspond à celle représentée Fig. C.5(b) où le domaine PML est supprimé et où on place une paroi rigide en  $x = 2L$ . Ce problème admet deux familles de solutions :

- Les modes rigides d'un conduit de dimension  $L$  (on a alors un nœud de vitesse  $u$  en  $x = L$ , et il y a donc continuité de  $u_p$ ). Ce sont les modes dont la longueur d'onde  $\lambda$  vaut  $\lambda = \frac{2L}{n}$ , soit  $\omega_n^{rig,1} \frac{L}{a_0} = n\pi$ .

- Les modes  $\omega_n^{rig,2} \frac{L}{a_0} = n\pi + \arctan\left(-\frac{2i}{Z}\right)$ .

Nous recherchons le pas de maillage  $\Delta_x$  (correspondant à la taille d'un élément) tel que la précision soit d'au moins  $10^{-8}$  jusqu'à  $\Re(\omega) \approx \Re(\omega_6)$ . Ce critère est satisfait avec  $\Delta_x = 0.75$  cm. Afin de le voir, nous cherchons l'erreur sur  $\omega_n^{rig,1}$  et  $\omega_n^{rig,2}$  pour  $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$  que nous traçons ensuite en fonction de  $\frac{L}{a_0} \frac{\Re(\omega)}{\pi}$  sur la figure C.6.

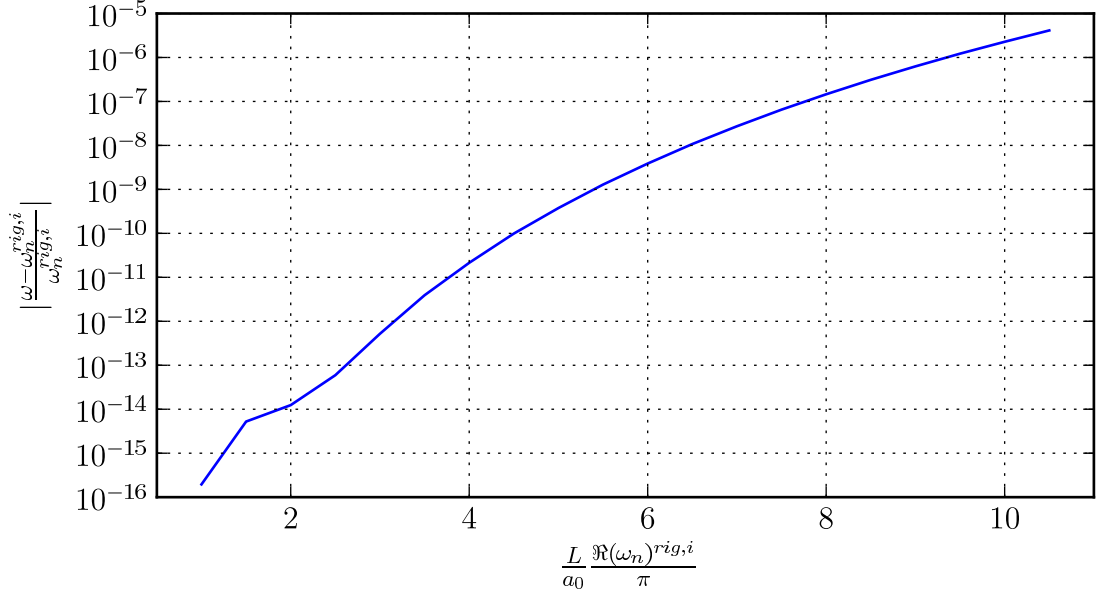


FIGURE C.6 – Courbe d'erreur entre les modes calculés numériquement et les solutions analytiques  $\omega_n^{rig,i}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  ( $\Delta_x = 0,75$  cm),  $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$

Dans la suite de cette étude nous garderons donc  $\Delta_x = 0.75$  cm.

#### C.4.2 Effet de la position de la couche PML : paramètre $x_0$

On observe numériquement qu'une relativement bonne précision est obtenue sur les modes  $\omega_n$ ,  $n \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$  avec les paramètres  $\beta = 1$ ,  $\sigma_0 = 3$ ,  $d = L$ . On trace alors l'erreur sur ces modes pour trois positions de la couche PML :  $x_0 \in \{L, 2L, 3L\}$  sur la figure C.7.

De façon générale nous remarquons la très faible sensibilité de l'erreur aux variations de  $x_0$ . La précision ne semble quasiment pas altérée par la couche PML étant donné que les courbes d'erreur sont très proches de la courbe correspondant à la précision numérique hormis en  $n = 1$ . Pour  $n = 1$ , l'erreur obtenue avec  $x_0 = 3L$  est bien plus importante que l'erreur obtenue avec  $x_0 = 2L$ , elle-même plus importante que l'erreur obtenue avec  $x_0 = L$ . En fait l'atténuation dans la couche PML dépend de  $\exp(-\Re(k_x)\Sigma(x))$  avec  $k_x = \frac{\omega}{a_0}$ . Nous supposons alors que pour  $n = 1$  ( $\Re(k_x) = \frac{\pi}{L}$ ), l'atténuation dans la zone PML est suffisamment faible pour que l'erreur soit sensible à l'amplitude de l'onde à l'entrée du domaine PML. Or, les modes obtenus étant spatialement instables, leur amplitude à l'entrée de la couche PML est d'autant plus grande que la distance  $x_0 - L$  est grande.

La précision n'étant pas affectée par le choix de  $x_0$ , il est préférable de choisir  $x_0$  le plus faible possible afin d'avoir le domaine de calcul le plus petit possible. Par ailleurs, lors de l'étude des modes de Béranger, nous verrons qu'il est préférable de choisir  $x_0$  le plus petit possible.

Par la suite, la valeur de  $x_0$  sera  $1.25L$

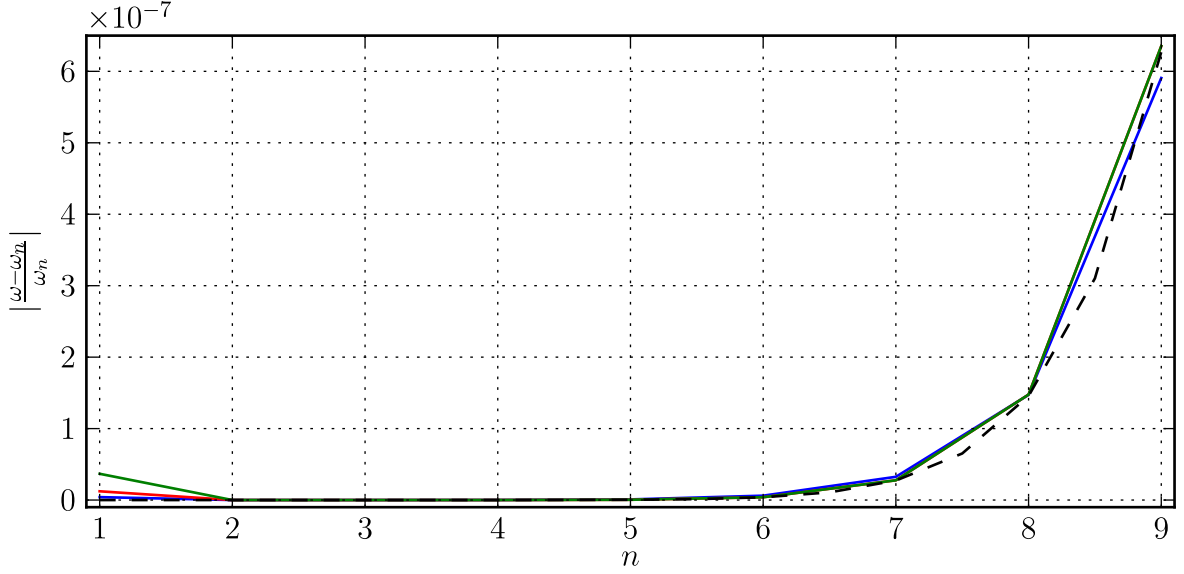


FIGURE C.7 – Courbe d’erreur entre les modes calculés numériquement et la solutions analytique  $\omega_n$  pour  $x_0 = L$  (courbe bleu),  $x_0 = 2L$  (courbe rouge) et  $x_0 = 3L$  (courbe verte). La ligne pointillée correspond à l’erreur numérique calculée en section C.4.1.  $n$  est l’ordre du mode.

### C.4.3 Effet de l’amortissement : paramètres $\sigma_0, \beta, d$

Nous fixons la taille du domaine PML  $d = L$  et nous calculons l’erreur sur les modes  $\omega_n, n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$  pour  $\beta \in \{1, 2\}$  et pour une gamme de  $\sigma_0$  permettant de passer d’un résultat grossier ( $\omega_i \approx 10^{-1}$ ) à la précision numérique imposée par  $\Delta_x$ . Les courbes d’erreur sont tracées figure C.8. Nous remarquons que pour des faibles valeurs de  $\sigma_0$ , la précision est meilleure sur les modes d’ordres plus élevés du fait d’une plus grande valeur de  $\Re(k)$ .  $\beta = 1$  ou  $\beta = 2$  permettent d’arriver à la même précision mais pour des valeurs significativement différentes de  $\sigma_0$ . Nous pouvons donc nous montrer critique vis-à-vis de l’étude proposée par Hein et collab. [65] sur l’erreur créée par la couche PML en fonction de ses différents paramètres : en effet leur étude sur l’influence du paramètre  $\beta$  est réalisée à  $\sigma_0 = 5$  fixé. Ils concluent alors qu’une meilleure précision est obtenue avec  $\beta = 1$  qu’avec  $\beta = 2$  et  $\beta = 3$ .

Comme nous l’avons vu précédemment, l’amortissement d’une onde en  $\exp(ik_x x)$  dans une couche PML s’écrit  $G_{pml}(x) = \exp(-\Re(k_x)\Sigma(x))$ . Nous pouvons aisément conjecturer que l’erreur créée par le domaine PML sera fortement influencée par la valeur de cet amortissement au bout de la couche PML  $G_{pml}(x_0 + d) = \exp(-\Re(k_x)\sigma_0 d^\beta)$ .

Pour chaque mode et pour chaque valeur de  $\beta$ , nous traçons l’erreur en fonction de  $G_{pml}(x_0 + d)$  ( $a_0 \Re(k) = \Re(\omega)$ ). Les courbes sont tracées figures C.9(a) et (b). Nous confirmons ainsi le résultat qui a été exprimé intuitivement : l’erreur induite par la couche PML dépend principalement de l’amortissement  $G_{pml}(x_0 + d)$  à l’extrémité du domaine PML. En effet, nous observons globalement que les courbes correspondant aux modes  $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$  sont très proches les unes des autres dans la gamme de valeurs de  $G_{pml}(x_0 + d)$  où la limitation sur la précision numérique ne se fait pas sentir (fig. C.9). Une analyse plus fine dans cette même gamme de valeurs montre en fait que pour un mode donné les courbes correspondant à  $\beta = 1$  et  $\beta = 2$  sont quasiment superposées et que l’erreur diminue légèrement lorsque l’on passe à un mode d’ordre supérieur. Cela s’explique par le fait que l’amplitude est plus importante à l’entrée du domaine PML pour  $n$  faible. Pour illustrer cela, nous calculons la valeur de  $|u|^2 + |u_\rho|^2$  en  $x_0$  pour chaque mode à  $G_{pml}(x_0 + d)$  fixé :  $G_{pml}(x_0 + d) = 10^{-3}$  (pour un mode d’ordre  $n$ , le calcul est effectué avec  $\sigma_0 = -\frac{L}{n\pi} d^{-\beta} \ln(10^{-3})$  et  $\beta = 1$ ). Nous observons alors que  $|u|^2 + |u_\rho|^2$  passe progressivement de  $|u|^2 + |u_\rho|^2 \approx 11.7533 \times 10^{-3}$  pour  $n = 1$  à  $|u|^2 + |u_\rho|^2 \approx 11.752 \times 10^{-3}$  pour  $n = 6$ .

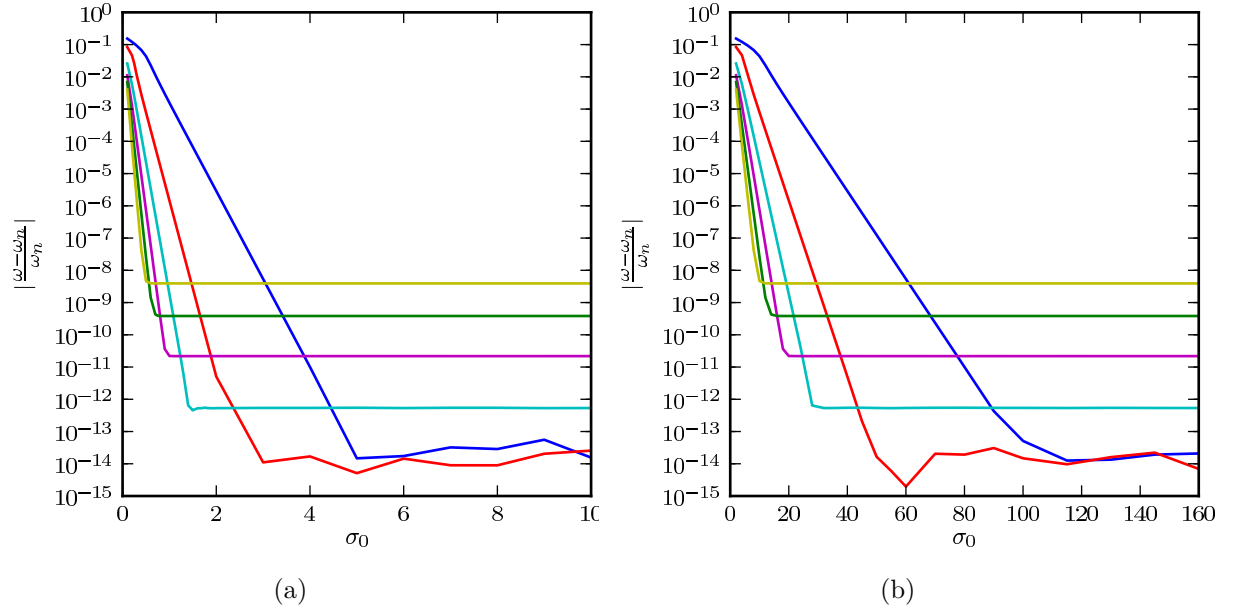


FIGURE C.8 – Erreur sur les solutions analytiques  $\omega_n$  en fonction du paramètre  $\sigma_0$  pour  $\beta = 1$ (a) et  $\beta = 2$ (b). Les différentes courbes correspondent à  $n = 1$  (bleu),  $n = 2$  (rouge),  $n = 3$  (cyan),  $n = 4$  (magenta),  $n = 5$  (vert),  $n = 6$  (jaune).

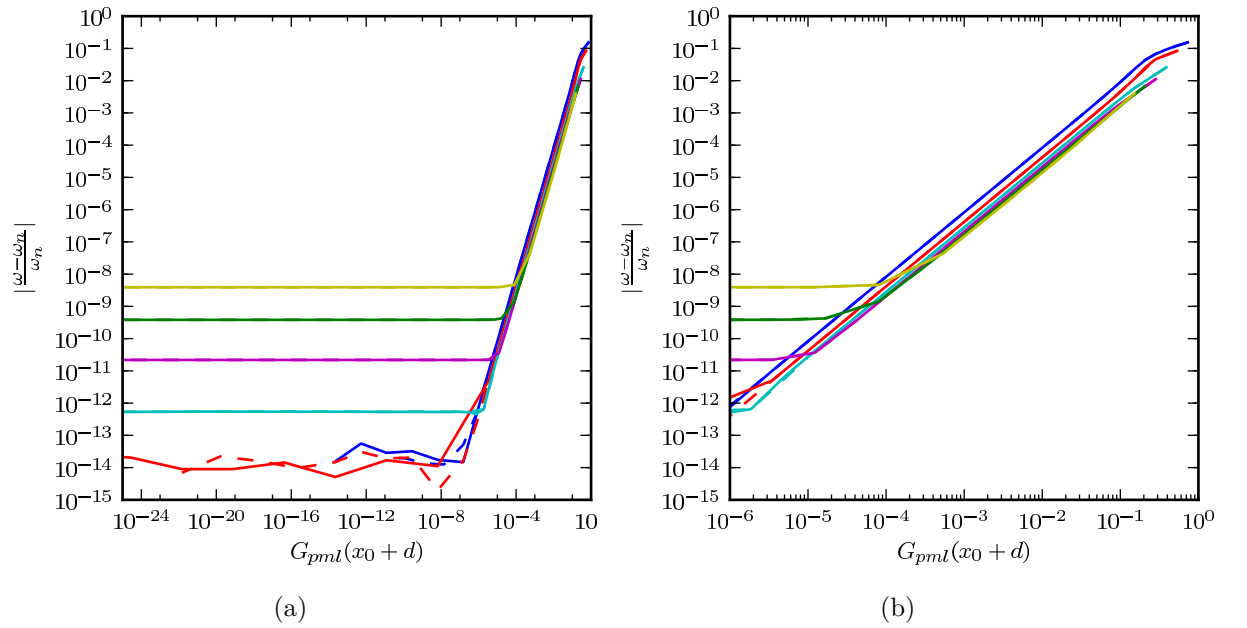


FIGURE C.9 – Erreur sur les solutions analytiques  $\omega_n$  en fonction de l'amortissement par la couche PML à l'extrémité de celle-ci :  $G_{pml}(x_0 + d)$ . Les différentes courbes correspondent à  $\beta = 1$  (trait continu),  $\beta = 2$  (trait pointillé),  $n = 1$  (bleu),  $n = 2$  (rouge),  $n = 3$  (cyan),  $n = 4$  (magenta),  $n = 5$  (vert),  $n = 6$  (jaune).

#### C.4.4 Effet de la position du domaine PML sur les modes de Bérenger

Pour une étude unidimensionnelle, Kim [82] montre que le spectre physique est mieux séparé des modes de Bérenger si la zone PML est placée directement après la zone provoquant la non homogénéité. Afin d'illustrer ce comportement, nous traçons sur la figure C.10 des spectres obtenus pour différentes valeurs de  $x_0$ . Nous observons notamment que les valeurs propres physiques sont mieux séparées des modes de Bérenger lorsque  $x_0$  est faible, les meilleurs résultats étant obtenus pour  $x_0 = L$  (pas de domaine intermédiaire). Les calculs étant effectués à nombre d'éléments constant, on observe une meilleure

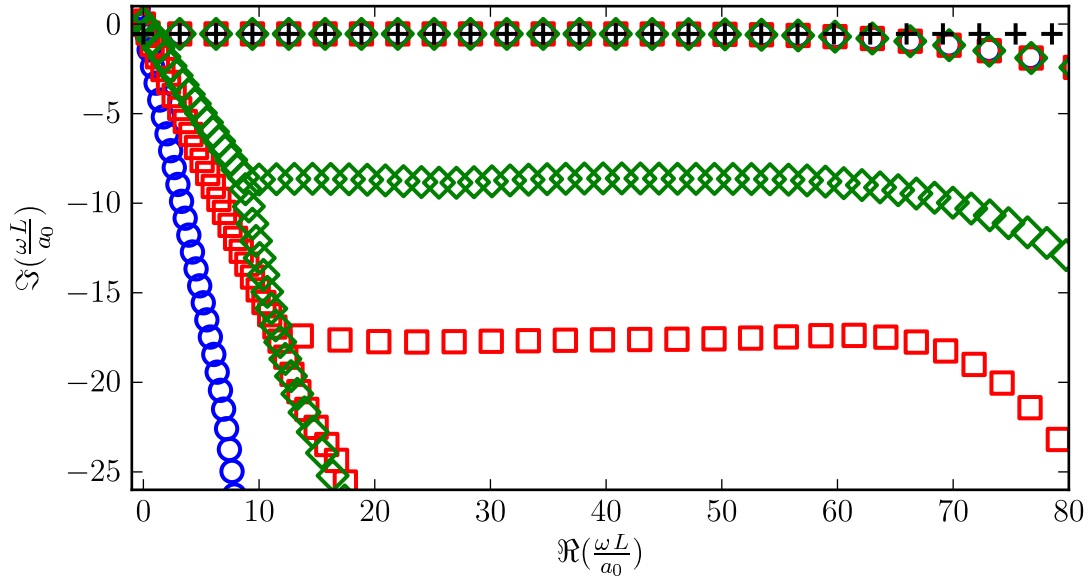


FIGURE C.10 – Fréquences propres obtenues pour différentes valeurs de  $x_0$ .

○ :  $x_0 = L$  ; □ :  $x_0 = 2L$  ; ◇ :  $x_0 = 3L$  ; + : Solution analytique

précision pour les calculs avec une zone intermédiaire moins étendue.



- [1] Alizard, F. et J.-C. Robinet. 2011, «Modeling of optimal perturbations in flat plate boundary layer using global modes : benefits and limits», *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 25, n° 1-4, p. 147–165. 136
- [2] Amestoy, P. R., I. S. Duff, J. Koster et J.-Y. L'Excellent. 2001, «A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling», *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 23, n° 1, p. 15–41. 58
- [3] Astley, R. 2000, «Infinite elements for wave problems : a review of current formulations and an assessment of accuracy», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, n° 7, p. 951–976. 43
- [4] Atkins, H. L. 1997, «Continued development of the discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustic applications», dans *3rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-1997-1581, p. 1–12. 4, 31, 35, 47
- [5] Atkins, H. L. et C.-W. Shu. 1996, «Quadrature-free implementation of the discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations», *AIAA Journal*, vol. 36, p. 775–782. 31
- [6] Aurégan, Y. et M. Leroux. 2008, «Experimental evidence of an instability over an impedance wall in a duct with flow», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, n° 3, p. 432–439. iv, vii, ix, 4, 17, 27, 28, 113, 123, 124, 125, 128, 131, 144, 145, 156, 157
- [7] Bagheri, S. 2010, *Analysis and control of transitional shear flows using global modes*, thèse de doctorat, Royal Institute of Technology KTH. 51
- [8] Balasubramanian, K. et R. I. Sujith. 2008, «Thermoacoustic instability in a Rijke tube : Non-normality and nonlinearity», *Physics of Fluids*, vol. 20, n° 4. 25
- [9] Balay, S., J. Brown, K. Buschelman, V. Eijkhout, W. Gropp, D. Kaushik, M. Knepley, L. McInnes, B. Smith et H. Zhang. 2012, «PETSc users manual», cahier de recherche ANL-95/11 - Revision 3.3, Argonne National Laboratory. 58
- [10] Barkley, D., H. Blackburn et S. Sherwin. 2008, «Direct optimal growth analysis for timesteppers», *International journal for numerical methods in fluids*, vol. 57, n° 9, p. 1435–1458. 25
- [11] Bers, A. 1984, «Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective», dans *Basic Plasma Physics : Selected Chapters, Handbook of Plasma Physics, Volume 1*, édité par A. A. Galeev et R. N. Sudan, p. 451. 22
- [12] Bi, W. 2008, «Calculations of modes in circumferentially nonuniform lined ducts», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 123, n° 5, p. 2603–2612. 17
- [13] Bi, W., V. Pagneux, D. Lafarge et A. Y. 2009, «Trapped modes at acoustically rigid splices», dans *AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference 2009-3105*, AIAA, Miami, Florida, p. 1–6. 18

- [14] Bonnet, A. et J. Luneau. 1989, *Théories de la dynamique des fluides*, Cépaduès Éditions. 11
- [15] Boucheron, R., H. Bailliet et J.-C. Valiere. 2006, «Analytical solution of multimodal acoustic propagation in circular ducts with laminar mean flow profile», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 292, n° 3–5, p. 504 – 518. 13
- [16] Boyer, G., E. Piot et J.-P. Brazier. 2011, «Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, n° 8, p. 1793 – 1809. 4, 28, 29, 137, 157
- [17] Brambley, E. 2009, «Low-frequency acoustic reflection at a hard–soft lining transition in a cylindrical duct with uniform flow», *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 65, p. 345–354. 18
- [18] Brambley, E. 2011, «A well-posed boundary condition for acoustic liners in straight ducts with flow», *AIAA Journal*, vol. 49, n° 6, p. 1272–1282. 26
- [19] Brambley, E. 2013, «Surface modes in sheared boundary layers over impedance linings», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, p. 3750–3767. 26
- [20] Brambley, E., M. Darau et S. Rienstra. 2012, «The critical layer in linear-shear boundary layers over acoustic linings», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 710, p. 545–568. 25
- [21] Brambley, E. et N. Peake. 2006, «Classification of aeroacoustically relevant surface modes in cylindrical lined ducts», *Wave Motion*, vol. 43, n° 4, p. 301 – 310. 17
- [22] Brambley, E. J. 2009, «Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings», *Journal of Sound Vibration*, vol. 322, p. 1026–1037. 22, 26, 45
- [23] Brambley, E. J. 2011, «Surface modes in sheared flow using the modified myers boundary condition», dans *17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2011-2736, p. 1–15. 26
- [24] Brambley, E. J., A. M. J. Davis et N. Peake. 2012, «Eigenmodes of lined flow ducts with rigid splices», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 690, p. 399–425. 17, 18
- [25] Brandes, M. et D. Ronneberger. 1995, «Sound amplification in flow ducts lined with a periodic sequence of resonators», dans *1st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-95-126, p. 893–901. 4, 26
- [26] Brazier, J.-P. 2002, «Étude des modes convectés dans un canal plan. Calcul numérique du déplacement acoustique», cahier de recherche, Onera. 133, 173
- [27] Brazier, J.-P. 2011, «Derivation of an exact energy balance for Galbrun equation in linear acoustics», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, n° 12, p. 2848 – 2868. 21
- [28] Brazier, J.-P. 2011, «MAMOUT : Module d’analyse modale unidimensionnelle avec les polynômes de Tchebychev. Instructions pour l’emploi des programmes SPECTRE et MODITER version 5», cahier de recherche, Onera. 137, 171, 172
- [29] Brazier, J.-P. 2012, «Extension du code BIGSAM aux maillages multidomaines. application à un matériau absorbant d’envergure réduite», cahier de recherche, ONERA. 18
- [30] Briggs, R. 1964, *Electron-Stream Interaction with Plasmas*, MIT Press, Cambridge, MA. 22
- [31] Burak, M. O., M. Billson, L.-E. Eriksson et S. Baralon. 2009, «Validation of a time- and frequency-domain grazing flow acoustic liner model», *AIAA Journal*, vol. 47, p. 1841–1848. 29
- [32] Butler, K. M. et B. F. Farrell. 1992, «Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow», *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, vol. 4, n° 8, p. 1637–1650. 146
- [33] Bécache, E., A. Dhia et G. Legendre. 2004, «Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation», *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 42, n° 1, p. 409–433. 45
- [34] Bécache, E., S. Fauqueux et P. Joly. 2003, «Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves», *Journal of Computational Physics*, vol. 188, n° 2, p. 399 – 433. 43



- [35] Bérenger, J.-P. 1994, «A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves», *Journal of Computational Physics*, vol. 114, n° 2, p. 185 – 200. 43
- [36] Cantrell, R. et R. Hart. 1964, «Interaction between sound and flow in acoustic cavities : Mass, momentum and energy considerations», *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 36, p. 697–706. 20
- [37] Carpenter, M. et C. Kennedy. 1994, «Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes», cahier de recherche 109112, NASA. 105, 106
- [38] Chevaugeon, N., J.-F. Remacle et X. Gallez. 2006, «Discontinuous Galerkin implementation of the extended Helmholtz resonator model in time domain», dans *12 th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2006-2569, p. 1–20. 19, 140
- [39] Chew, W. et W. Weedon. 1994, «A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates», *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 7, n° 13, p. 599–604. 44
- [40] Chiba, S. 1998, «Global stability analysis of incompressible viscous flow», *J. Jpn. Soc. Comput. Fluid Dyn*, vol. 7, p. 20–48. 51
- [41] Cockburn, B. 2003, «Discontinuous Galerkin methods», *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 83, n° 11, p. 731–754. 35
- [42] Cooper, A. J. et N. Peake. 2006, «Transient growth and rotor-stator interaction noise in mean swirling duct flow», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, n° 3-5, p. 553–570. 21, 25, 133
- [43] Corbett, P. et A. Bottaro. 2001, «Optimal linear growth in swept boundary layers», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 435, n° 1, p. 1–23. 25, 135
- [44] Cowper, G. R. 1973, «Gaussian quadrature formulas for triangles», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, n° 3, p. 405–408. 40
- [45] Crighton, D. 1977, «Introduction to Wiener-Hopf methods in acoustics and vibration», cahier de recherche, David W. Taylor Naval Ship R&D Center. 13
- [46] Del Álamo, J. et J. Jiménez. 2006, «Linear energy amplification in turbulent channels», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 559, p. 205–213. 28
- [47] Delorme, P., P. Mazet, C. Peyret et Y. Ventribout. 2005, «Computational aeroacoustics applications based on a discontinuous Galerkin method», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 333, n° 9, p. 676 – 682. 4, 11, 31, 162
- [48] Di Mare, L., A. Sayma, J. Coupland et M. Imregun. 2005, «Acoustic liner models in a general purpose cfd code», dans *26th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2005-3057, p. 1–10. 121
- [49] Duan, Y., W. Koch, C. M. Linton et M. McIver. 2007, «Complex resonances and trapped modes in ducted domains», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 571, p. 119–148. vii, 14, 47
- [50] Ehrenstein, U. et F. Gallaire. 2005, «On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows : the flat-plate boundary layer», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 536, p. 209–218. 25, 133
- [51] Evans, D. et C. Linton. 1991, «Trapped modes in open channels», *J. Fluid Mech*, vol. 225, p. 153–175. 14
- [52] Fuß, S., S. C. Hawkins et S. Marburg. 2011, «An eigenvalue search algorithm for the modal analysis of a resonator in free space», *Journal of Computational Acoustics*, vol. 19, n° 01, p. 95–109. vii, 44, 47
- [53] Félix, S. et V. Pagneux. 2007, «Acoustic and hydrodynamic modes generated by a point source in a duct carrying a parallel shear flow», dans *Proceedings of the 19th International Congress on Acoustics*. 25

- [54] Gabard, G. 2013, «A comparison of impedance boundary conditions for flow acoustics», *Journal of Sound And Vibration*, vol. 332, p. 714–724. 26
- [55] Gabard, G. et R. Astley. 2008, «A computational mode-matching approach for sound propagation in three-dimensional ducts with flow», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, n° 4-5, p. 1103–1124. 4, 17, 18
- [56] Gabard, G. et R. J. Astley. 2006, «Theoretical model for sound radiation from annular jet pipes : far- and near-field solutions», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. null, p. 315–341. 14
- [57] Geuzaine, C. et J.-F. Remacle. 2013, *Gmsh Reference Manual*. xiii, 60
- [58] Godin, A., O. 1997, «Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid», *Wave Motion*, vol. 25, p. 143–167. 21
- [59] Goursaud, B. 2010, *Étude mathématique et numérique de guides d’ondes ouverts non uniformes, par approche modale*, thèse de doctorat, École doctorale de l’École Polytechnique. 48
- [60] Guégan, A., P. Schmid et P. Huerre. 2006, «Optimal energy growth and optimal control in swept Hiemenz flow», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 566, n° 1, p. 11–45. 25, 134
- [61] Haddar, H., J.-R. Li et D. Matignon. 2010, «Efficient solution of a wave equation with fractional-order dissipative terms», *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, n° 6, p. 2003–2010. 26
- [62] Hagstrom, T. et I. Nazarov. 2002, «Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulation», dans *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2002-2606, p. 1–13. 45
- [63] Hamilton, J. et R. Astley. 2003, «Acoustic propagation on irrotational mean flows using time-domain finite and infinite elements», dans *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2003-3208, p. 1–11. 43
- [64] Hartmann, R. 2007, «Adjoint consistency analysis of discontinuous Galerkin discretizations», *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 45, n° 6, p. 2671–2696. 38
- [65] Hein, S., T. Hohage et W. Koch. 2004, «On resonances in open systems», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 506, n° 1, p. 255–284. 14, 47, 48, 108, 168, 177
- [66] Herbert, T. 1997, «Parabolized Stability Equations», *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 29, p. 245–283. 22
- [67] Hernandez, V., R. J.E. et V. Vidal. 2005, «SLEPc : A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems», *ACM Trans. Math. Software*, vol. 31, n° 3, p. 351–362. 58, 155
- [68] Hernández, V., J. Román, A. Tomás et V. Vidal. 2007, «Krylov-schur methods in SLEPc», cahier de recherche, Universidad Politecnica de Valencia. 58
- [69] Hesthaven, J. S. et T. Warburton. 2007, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods Algorithms, Analysis, and Applications*, 1<sup>re</sup> éd., Springer Publishing Company, Incorporated. 31, 33, 36, 38, 39, 105, 171
- [70] Hochstenbach, M., E. Romero et J. Roman. 2012, «Davidson type subspace expansions for the linear eigenvalue problem», cahier de recherche, Universitat politècnica de Valencia. 51
- [71] Hu, F. 1996, «On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer», *Journal of Computational Physics*, vol. 129, n° 1, p. 201 – 219. 43
- [72] Hu, F. 2001, «A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables», *Journal of Computational Physics*, vol. 173, n° 2, p. 455–480. 43, 45
- [73] Hu, F. 2005, «A perfectly matched layer absorbing boundary condition for linearized Euler equations with a non-uniform mean flow», *Journal of Computational Physics*, vol. 208, n° 2, p. 469 – 492. 45, 47, 107

- [74] Hu, F. 2008, «Development of PML absorbing boundary conditions for computational aeroacoustics : A progress review», *Computers & Fluids*, vol. 37, n° 4, p. 336 – 348. vii, 46
- [75] Hu, F. et H. Atkins. 2003, «A discrete analysis of non-reflecting boundary conditions for discontinuous Galerkin method», dans *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2003-3301, p. 1–13. 47, 98
- [76] Hu, F. Q., M. Y. Hussaini et P. Rasetarinera. 1999, «An analysis of the discontinuous Galerkin method for wave propagation problems», *J. Comput. Phys.*, vol. 151, p. 921–946. 36, 37, 38, 60
- [77] Huerre, P. et P. A. Monkewitz. 1990, «Local and global instabilities in spatially developing flows», *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 22, p. 473–537. 22, 23
- [78] Hoepffner, J., A. Bottaro et J. Favier. 2010, «Mechanisms of non-modal energy amplification in channel flow between compliant walls», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 642, p. 489–507. 136
- [79] Ingard, U. 1959, «Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reflection, absorption, and transmission», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 31, n° 7, p. 1035–1036. 15
- [80] Jones, M. G., W. R. Watson et T. L. Parrott. 2005, «Benchmark data for evaluation of aeroacoustic propagation codes with grazing flow», dans *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2005-2853, p. 1–18. 19, 29, 42
- [81] Jüschke, M. 2006, *Akustische Beeinflussung einer Instabilität in Kanälen mit überströmten Resonatoren*, thèse de doctorat, Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek Göttingen. vii, 4, 26, 27
- [82] Kim, S. 2009, *Analysis of a PML method applied to computation of resonances in open systems and acoustic scattering problems*, thèse de doctorat, Texas A & M University. 48, 179
- [83] Klöckner, A., T. Warburton, J. Bridge et J. S. Hesthaven. 2009, «Nodal discontinuous Galerkin methods on graphics processors», *J. Comput. Phys.*, vol. 228, n° 21, p. 7863–7882. 39
- [84] Koch, W. 2004, «Acoustic resonances in rectangular open cavities», dans *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2004-2843, p. 1–12. vii, 47, 48, 111, 112
- [85] Lehoucq, R. et A. Salinger. 1999, «Large-scale eigenvalue calculations for stability analysis of steady flows on massively parallel computers», *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, vol. 36, p. 309–327. 50, 51
- [86] Léon, O. 2012, *Étude du rayonnement acoustique des instabilités hydrodynamiques de jets double-flux avec les équations de stabilité parabolisées (PSE)*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse). 23
- [87] Levine, H. et J. Schwinger. 1948, «On the radiation of sound from an unflanged circular pipe», *Phys. Rev.*, vol. 73, p. 383–406. 14
- [88] Li, X. D., C. Richter et F. Thiele. 2006, «Time-domain impedance boundary conditions for surfaces with subsonic mean flows», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119, n° 5, p. 2665–2676. 29
- [89] Lockard, D. et H. Atkins. 1999, «Efficient implementations of the quadrature-free discontinuous Galerkin method», dans *14th AIAA CFD Conference*, AIAA-99-3309, p. 1–11. 4, 31
- [90] Mack, C. 2009, *Global Stability of compressible flow about a swept parabolic body*, thèse de doctorat, École Polytechnique Laboratoire d'Hydrodynamique (LadHyX). 50
- [91] Malmarmy, C. 2000, *Etude théorique et expérimentale de l'impédance acoustique de matériaux en présence d'un écoulement d'air tangentiel*, thèse de doctorat, Université du Maine. vii, 16

- [92] Mao, X., H. M. Blackburn et S. Sherwin. 2012, «Calculation of global optimal initial and boundary perturbations for the linearised incompressible Navier-Stokes equations», *Journal of Computational Physics*. 135, 136
- [93] Marx, D. et Y. Aurégan. 2010, «Comparison of experiments with stability analysis prediction in a lined flow duct», dans *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2010-3946, p. 1–17. 4, 27, 28, 29, 140, 157
- [94] Marx, D., Y. Aurégan, H. Bailliet et J.-C. Valière. 2009, «Evidence of hydrodynamic instability over a liner in a duct with flow», dans *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2009-3170, p. 1–11. 27
- [95] Marx, D., Y. Aurégan, H. Bailliet et J.-C. Valière. 2010, «PIV and LDV evidence of hydrodynamic instability over a liner in a duct with flow», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 18, p. 3798–3812. 4, 27, 149, 151
- [96] Marx, D. et Y. Aurégan. 2013, «Effect of turbulent eddy viscosity on the unstable surface mode above an acoustic liner», *Journal of Sound and Vibration*. xi, 4, 10, 28, 29, 131, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157
- [97] Merle, X., F. Alizard et J.-C. Robinet. 2010, «Finite difference methods for viscous incompressible global stability analysis», *Computers & Fluids*, vol. 39, n° 6, p. 911–925. 51
- [98] Méry, F. 2010, *Instabilités linéaires et rayonnement acoustique d'un écoulement sur une paroi présentant une cavité*, thèse de doctorat, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE). 23
- [99] Meyer, E., F. Mechel et G. Kurtze. 1958, «Experiments on the influence of flow on sound attenuation in absorbing ducts», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 30, n° 3, p. 165–174. 4, 26
- [100] Monokrousos, A., E. Åkervik, L. Brandt et D. Henningson. 2010, «Global three-dimensional optimal disturbances in the Blasius boundary-layer flow using time-steppers», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 650, p. 181. 25, 135
- [101] Morfey, C. 1971, «Acoustic energy in non-uniform flows», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 14, p. 159–169. 20
- [102] Myers, M. 1980, «On the acoustic boundary condition in the presence of flow», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 71, n° 3, p. 429–434. 15
- [103] Myers, M. 1991, «Transport of energy by disturbances in arbitrary steady flows», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 226, p. 383–400. 20, 21
- [104] Nayfeh, A. H. et D. P. Telionis. 1973, «Acoustic propagation in ducts with varying cross sections», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 54, n° 6, p. 1654–1661. 13
- [105] Noble, B. 1958, *Methods based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*, Pergamon. 13
- [106] Özyörük, Y. et L. Long. 1997, «A time-domain implementation of surface acoustic impedance condition with and without flow», *Journal of Computational Acoustics*, vol. 5, n° 03, p. 277–296. 4, 19, 156
- [107] Pagneux, V., N. Amir et J. Kergomard. 1996, «A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I. Theory and validation», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 100, n° 4, p. 2034–2048. 4, 13
- [108] Fosas de Pando, M., D. Sipp et P. Schmid. 2012, «Efficient evaluation of the direct and adjoint linearized dynamics from compressible flow solvers», *Journal of Computational Physics*, vol. 231, n° 23, p. 7739 – 7755. 50

- [109] Paredes, P., M. Hermanns, S. Le Clainche et V. Theofilis. 2013, «Order  $10^4$  speedup in global linear instability analysis using matrix formation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 253, n° 0, p. 287–304. 157
- [110] Parker, R. 1967, «Resonance effects in wake shedding from parallel plates : Calculation of resonant frequencies», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 5, n° 2, p. 330–343. 14
- [111] Pascal, L., E. Piot et G. Casalis. 2012, «Discontinuous Galerkin method for acoustic modes computation in lined ducts», dans *18 th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2012-2153, p. 1–12. 5, 60
- [112] Pascal, L., E. Piot et G. Casalis. 2013, «Discontinuous Galerkin method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, n° 13, p. 3270 – 3288. 4, 60, 65
- [113] Pérez, J., F. Gómez, H. Blackburn et V. Theofilis. 2012, «A shift-invert strategy for global flow instability analysis using matrix-free methods», dans *42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, 2012-3276, p. 1–12. 51
- [114] Persson P., O. et P. J. 2007, «Newton-GMRES preconditioning for discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations», *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 30, n° 6, p. 2709–2733. 39
- [115] Peyret, C., Y. Ventribout, P. Delorme et P. Mazet. 2004, «Travaux théoriques et numériques sur la résolution des équations d'Euler linéarisées par la méthode de Galerkin discontinue», cahier de recherche RTS 3/08324 DSNA, Onera. 4, 35
- [116] Primus, J. 2012, *Détermination de l'impédance acoustique de matériaux absorbants en écoulement par méthode inverse et mesures LDV*, thèse de doctorat, INSA Toulouse. viii, 29, 87, 88, 89, 94
- [117] Publication, N. C., éd.. 1995, *ICASE/LaRC workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics*, vol. 3300. 107
- [118] Pujals, G., G.-V. M., C. Cossu et S. Depardon. 2009, «A note on optimal transient growth in turbulent channel flows», *Physics of fluids*, vol. 21, p. 015109. 28
- [119] Rechberger, M. 2005, *Numerical Methods for the Simulation of Acoustic Resonances*, mémoire de maîtrise, Johannes Kepler, Universität Linz. 47, 48
- [120] Redon, E., A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.-F. Mercier et P. Sari. 2011, «Non-reflecting boundary conditions for acoustic propagation in ducts with acoustic treatment and mean flow», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 86, n° 11, p. 1360–1378. 43
- [121] Reed, W. et T. Hill. 1973, «Triangular mesh methods for the neutron transport equation», cahier de recherche LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory. 31
- [122] Reynolds, W. et W. Tiederman. 1967, «Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 27, n° 2, p. 253–272. 28
- [123] Richter, C. 2009, *Liner impedance modeling in the time domain with flow*, thèse de doctorat, Technische Universitaet Berlin. 17, 128
- [124] Richter, C., J. Hay, L. Panek, N. Schoenwald, S. Busse et F. Thiele. 2011, «A review of time-domain impedance modelling and applications», *Journal of Sound And Vibration*, vol. 330, p. 3859–3873. 16, 120, 157
- [125] Richter, C., F. Thiele, X. Li et M. Zhuang. 2007, «Comparison of time-domain impedance boundary conditions by lined duct flows», *AIAA Journal*, vol. 45, n° 6, p. 1333–1345. 19
- [126] Rienstra, S. 2003, «A classification of duct modes based on surface waves», *Wave Motion*, vol. 37, n° 2, p. 119 – 135. 4, 17, 26, 28, 140, 166

- [127] Rienstra, S. et M. Darau. 2011, «Boundary-layer thickness effects of the hydrodynamic instability along an impedance wall», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 671, p. 559–573. 26
- [128] Rienstra, S. et A. Hirschberg. 2010, *An Introduction to Acoustics*, Eindhoven University of Technology. 10, 16, 21
- [129] Rienstra, S. et G. Vilenski. 2008, «Spatial instability of boundary layer along impedance wall», dans *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2008-2932, p. 1–13. 28
- [130] Rienstra, S. W. 1999, «Sound transmission in slowly varying circular and annular lined ducts with flow», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 380, p. 279–296. 13
- [131] Rienstra, S. W. 2006, «Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model», dans *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA-2006-2686, p. 1–20. vii, 4, 15, 16, 17, 19, 26, 136, 156, 157
- [132] Rienstra, S. W. 2007, «Acoustic scattering at a hard–soft lining transition in a flow duct», *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 59, p. 451–475. 18
- [133] Rienstra, S. W. et M. Darau. 2010, «Mean flow boundary layer effects of hydrodynamic instability of impedance wall», *Procedia Engineering*, vol. 6, p. 124–132. 26, 28, 140
- [134] Rodrigues Sanchez, J. 2013, *Etude théorique et numérique des modes propres acoustiques dans un conduit avec écoulement et parois absorbantes*, thèse de doctorat, ISAE. En cours. 94
- [135] Rogier, H. et D. De Zutter. 2001, «Berenger and leaky modes in microstrip substrates terminated by a perfectly matched layer», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, n° 4, p. 712–715. 48
- [136] Saad, Y. 1996, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing Company. 50
- [137] Saric, W. S., A. Nayfeh et H. 1975, «Nonparallel stability of boundary-layer flows», *Physics of Fluids*, vol. 18, p. 945–950. 22
- [138] Sbardella, L., B. Tester et M. Imregun. 2001, «A time-domain method for the prediction of sound attenuation in lined ducts», *Journal of sound and vibration*, vol. 239, n° 3, p. 379–396. 4, 5, 19, 114, 156, 157
- [139] Schmid, P. 2007, «Nonmodal stability theory», *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 39, n° 1, p. 129–162. 4, 20, 24, 133, 135
- [140] Schmid, P., L. Li, M. Juniper et O. Pust. 2010, «Applications of the dynamic mode decomposition», *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, p. 1–11. 51
- [141] Schmid, P. J. 2010, «Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 656, p. 5–28. 51
- [142] Shi, S., C. Chen et D. Prather. 2004, «Band structure calculation of photonic crystal slab by using plane wave expansion method with perfectly matched layers», dans *Integrated Optoelectronic Devices 2004*, International Society for Optics and Photonics, p. 62–68. 48, 50, 110, 111, 152, 156
- [143] Sipp, D. et O. Marquet. 2012, «Characterization of noise amplifiers with global singular modes : the case of the leading-edge flat-plate boundary layer», *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, p. 1–19. 24, 38
- [144] Sirkes, Z. et E. Tziperman. 1997, «Finite difference of adjoint or adjoint of finite difference?», *American Meteorological Society*, vol. 125, n° 12, p. 3373–3378. 38
- [145] Tam, C. et L. Auriault. 1996, «Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics», *AIAA Journal*, vol. 34, n° 5, p. 917–923. 4, 15, 19

- [146] Tam, C., L. Auriault et F. Cambuli. 1998, «Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains», *Journal of Computational Physics*, vol. 144, n° 1, p. 213–234. 43, 156
- [147] Tam, C. et H. Ju. 2009, «Finite difference computation of acoustic scattering by small surface inhomogeneities and discontinuities», *J. Comput. Phys.*, vol. 228, n° 16, p. 5917–5932. 17
- [148] Tam, C. et J. C. Web. 1993, «Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics.», *Journal of Computational Physics*, vol. 107, p. 262–281. 37
- [149] Tezuka, A. et K. Suzuki. 2006, «Three-dimensional global linear stability analysis of flow around a spheroid», *AIAA journal*, vol. 44, n° 8, p. 1697–1708. 51
- [150] Theofilis, V. 2003, «Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows», *Progress in aerospace sciences*, vol. 39, n° 4, p. 249–315. 20, 23
- [151] Theofilis, V. 2011, «Global linear instability», *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 43, p. 319–352. 20, 23
- [152] Toulorge, T. et W. Desmet. 2011, «CFL conditions for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods on triangular grids», *Journal of Computational Physics*, vol. 230, p. 4657–4678. 105
- [153] Ventribout, Y. 2006, *Contrôle des perturbations aéroacoustiques par impédances de parois : application à un modèle de matériaux poreux*, thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’aéronautique et de l’espace. 11, 31, 38, 103, 156, 161
- [154] Voss, H. 2010, «Iterative projection methods for large-scale nonlinear eigenvalue problems», *Computational Technology Reviews*, vol. 1, p. 187–214. 114
- [155] Wang, X. et X. Sun. 2011, «A new segmentation approach for sound propagation in non-uniform lined ducts with mean flow», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, n° 10, p. 2369 – 2387. 18
- [156] Wieczorek, K., C. Sensiau, W. Polifke et F. Nicoud. 2011, «Assessing non-normal effects in thermoacoustic systems with mean flow», *Physics of Fluids*, vol. 23, n° 10, p. 107103. 25
- [157] Wright, M. 2006, «Hybrid analytical/numerical method for mode scattering in azimuthally non-uniform ducts», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 292, n° 3-5, p. 583–594. vii, 18
- [158] Yamoumi, S., D. Sipp et L. Jacquin. 2013, «Interaction between feedback aeroacoustic and acoustic resonance mechanisms in a cavity flow : a global stability analysis», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 717, p. 134–165. 23
- [159] Zienkiewicz, O. et R. Taylor. 1989, *The finite element method. Volume 1. Basic formulation and linear problems. 4th edition*, McGraw-Hill, London. 39
- [160] Élias, G. 1996, «Nouvelles expressions pour l’énergie et l’intensité acoustique dans un écoulement non uniforme», cahier de recherche RT 22/3641, Onera. 21







## Résumé

Ce travail de thèse s'inscrit dans l'effort de réduction des nuisances sonores dues à la soufflante d'un réacteur double-flux à l'aide de matériaux absorbants acoustiques, appelés communément «liners». Afin d'optimiser ces traitements acoustiques, il convient d'étudier en détail la physique de la propagation acoustique en présence de liner. De plus, il s'agit d'améliorer la compréhension des instabilités hydrodynamiques pouvant se développer sur un liner sous des conditions particulières et possiblement génératrices de bruit. Ce travail de thèse a consisté à développer un code de calcul en formulation Galerkin discontinue pour l'analyse modale et la stabilité dans un conduit traité acoustiquement, code qui a été appliqué à des configurations réalistes, en considérant une section transverse ou longitudinale d'un conduit. Les études modales réalisées dans la section transverse ont apporté des informations sur la propagation acoustique dans une nacelle de turbofan avec des discontinuités du traitement acoustique («splices»), ainsi que dans le banc B2A de l'ONERA. Les calculs dans la section longitudinale ont nécessité l'implantation de conditions aux limites PML pour tronquer le domaine de calcul, ainsi que d'une condition aux limites sur le liner, modélisée en domaine temporel à partir d'une extension de travaux existants dans la littérature. Avec ces outils, le code a permis de mettre en évidence une dynamique de type amplificateur de bruit due au développement d'une instabilité hydrodynamique sur le liner en présence d'écoulement cisailé ainsi qu'un rayonnement acoustique en amont et en aval du conduit dû à cette instabilité.

Mots clefs : acoustique, liner, instabilité hydrodynamique, perturbation optimale, méthode Galerkin discontinue

## Abstract

The current work deals with the reduction of aircraft engine fan noise using acoustic lining. In order to optimise these liners, it is necessary to deeply understand the physics of acoustic wave propagation in lined ducts and to have a better knowledge of the hydrodynamic instabilities existing under particular conditions and likely to radiate noise. This work is about the development of a discontinuous Galerkin solver for modal and stability analysis in lined flow duct and the application of this solver to realistic configurations by considering the transverse or longitudinal section of a duct. The modal studies in the transverse section brought informations on acoustic propagation in a turbofan nacelle with lining discontinuities ("splices") and in the B2A bench of ONERA. The computation in the longitudinal section of a duct required the implementation of PML boundary conditions in order to truncate the computational domain and of a boundary condition at the lined wall, modeled in temporal domain by the enhancement of a method published in the literature. With these features, the application of the solver highlighted a noise amplifier dynamics caused by the development of a hydrodynamic instability on the liner with sheared flow and a noise radiation mechanism upstream and downstream the lined section.

Keywords : acoustics, liner, hydrodynamic instability, optimal perturbation, discontinuous Galerkin method